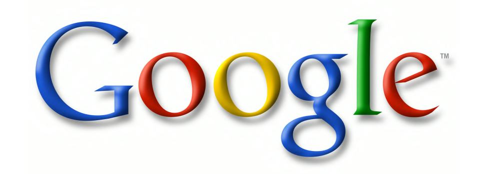
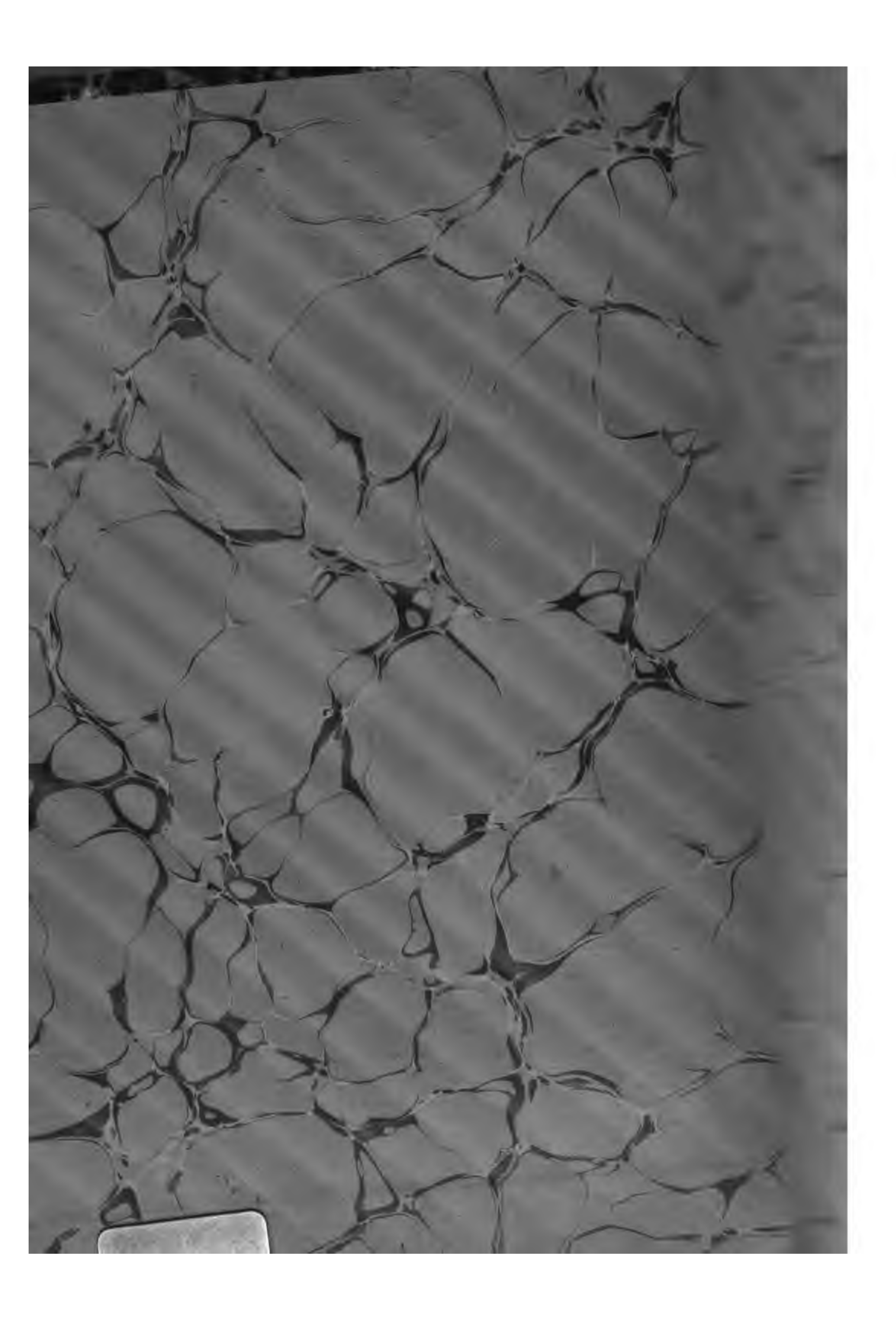




ŒUVRES

DE FERMAT.

16642 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

ŒUVRES

DE FERMAT

PUBLIÉES PAR LES SOINS DE

MM. PAUL TANNERY ET CHARLES HENRY

SOUS LES AUSPICES

DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

TOME DEUXIÈME.

CORRESPONDANCE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

MDCCCXCIV

TABLE DES MATIÈRES

DU DEUXIÈME VOLUME (1).

Pages

(1) Les lettres majuscules placées devant les renvois indiquent que la pièce a été imprimée : V dans les *Varia Opera*, W dans le *Commercium epistolicum* de Wallis, D dans les *Lettres de Descartes*, P dans les *Œuvres de Pascal*, H dans la *Correspondance de Huygens*; enfin M qu'elle est tirée de sources manuscrites.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES DU TOME DEUXIÈME.

AVERTISSEMENT.

Dans le premier Volume de cette édition (*Avertissement*, p. xxxIII), nous en avions annoncé deux suivants pour la *Correspondance de Fermat*, tandis que nous avons réuni en un seul Tome toutes les pièces connues de cette correspondance, en dehors de celles que leur caractère nous avait déjà fait publier dans les *Œuvres diverses* ou dans leur *Appendice*; il a en effet été jugé préférable, contrairement à notre plan primitif, de laisser en dehors, ou plutôt de réserver pour les Volumes du *Complément* en préparation, les diverses lettres adressées par exemple à Mersenne par Descartes, ou à Digby par Wallis ou Brouncker, et qui ont dû être communiquées à Fermat sur le désir formel ou sous l'aveu tacite de leurs auteurs. Nous n'avons donc admis, en principe, que les lettres écrites par Fermat ou directement adressées à lui; nous n'avons fait d'exception que : 1° pour les deux lettres de Descartes à Mersenne (nos 25 et 27) qu'il est indispensable d'avoir sous les yeux afin de comprendre les polémiques relatives à la dioptrique et à la méthode des tangentes; 2° pour une lettre de Frenicle à Mersenne (n° 38) qui était inédite et a été l'origine des relations entre Fermat et Frenicle; 3° pour deux lettres échangées entre Carcavi et Huygens (nos 77 *bis* et 78), qui comblent en partie de regrettables lacunes de la correspondance entre Pascal et Fermat sur les probabilités. Enfin, comme indications relatives aux nombreuses lettres perdues de Fermat, nous nous sommes, dans le présent Volume, bornés à quelques notes et à quatre Extraits de l'*Harmonie universelle* de Mersenne annexés aux lettres nos 2, 3 et 4.

N'ayant pas à revenir sur les questions relatives aux sources utilisées pour notre publication, nous pouvons nous borner aujourd'hui à quelques remarques touchant les dispositions typographiques et l'orthographe que nous avons adoptées.

Dans le but de faciliter les renvois pour les trois index (des noms propres, de la langue mathématique de Fermat, des matières) qui seront insérés dans le *Complément*, après la traduction des Œuvres latines, nous avons sub-

divisé les lettres, d'après les sujets traités, en paragraphes numérotés par des chiffres gras (égyptiens), que leur forme distingue nettement de ceux qui sont empruntés aux sources.

De même que dans le premier Volume, nous avons cherché avant tout la commodité de la lecture; nous avons donc, sans aucun scrupule, multiplié les alinéas et conformé la ponctuation aux habitudes modernes.

Pour l'orthographe française ([1]), nous avons en principe adopté celle du XVIII[e] siècle, sauf à conserver les formes constamment usitées du temps de Fermat pour les mots techniques, comme *méchanique, quarré;* en dehors de la question de commodité, nous étions forcément conduits à cette solution, par suite de l'impossibilité absolue où l'on se trouve de reconstituer la véritable orthographe de Fermat.

On possède de Descartes, par exemple, assez de lettres autographes pour qu'il soit possible aujourd'hui de publier son énorme correspondance avec un texte conforme à l'orthographe rationnelle ([2]) qu'il adopta vers l'âge de quarante ans et qui est plus ou moins défigurée dans l'édition de Clerselier; mais pour Fermat, il fallait renoncer à toute tentative analogue. Il nous reste en tout de lui huit autographes en français (la dédicace à Carcavi, publiée dans l'Avertissement du premier Volume, pages XIX-XX, les n[os] **64**, **65**, **66**, **100**, **102**, **109**, **111** de la Correspondance); deux seulement, **66** et **102**, dépassent la proportion de simples billets, et leur ensemble nous permet tout au plus de conjecturer que Fermat avait une orthographe personnelle dont on pourrait marquer quelques traits ([3]), sans pouvoir affirmer qu'elle fût constante ([4]), même en dehors des lapsus de plume, auxquels il semble avoir été quelque peu sujet.

Nous avons, en tout cas, reproduit, sans les modifier, les autographes à

([1]) En ce qui concerne les textes latins, nous avons suivi les mêmes principes que pour le premier Volume (*voir* l'Avertissement, page XXX).

([2]) Nous pouvons ajouter « très réformatrice », d'autant que nombre de simplifications qu'il avait introduites sont encore à réaliser, quoiqu'elles soient également réclamées par l'étymologie et la prononciation. On peut prendre comme exemple l'orthographe usuelle du mot même auquel se rapporte cette note.

([3]) Aucun *z* final; le *t* final conservé au pluriel; la forme *demender*.

([4]) On trouve *honeur* et *honneur*, *avance* et *advance* dans des lettres différentes; dans la même, *commis*, mais *comission* et *comissaire;* il ne faut pas faire entrer en ligne de compte dans une autre lettre, *esgalité* et *egal* (page 437). Dans le second mot, l'accent peut avoir échappé à la plume; or, à cette époque, où en principe on accentuait seulement les finales non muettes, *é*, dans le corps des mots et surtout pour un texte manuscrit, n'est pas une forme orthographique réellement différente de *es*; c'est une simple abréviation dont l'usage est arbitraire.

notre disposition (¹); quant aux pièces qui ne sont connues que par des copies ou par l'édition des *Varia*. l'orthographe des sources ne présente certainement aucune authenticité. Nous avons déjà dit, dans l'Avertissement du premier Volume, que ceux qui ont copié au XVIIe siècle les écrits de Fermat, ne se sont fait aucun scrupule d'y introduire les notations algébriques cartésiennes; on ne peut supposer qu'ils aient respecté l'orthographe; Arbogast a également introduit la sienne dans les copies qu'il a faites, de première ou de seconde main. Le texte des *Varia* présente enfin des formes spéciales (²), systématiquement adoptées et qu'on doit attribuer à l'imprimeur beaucoup plutôt qu'à Samuel Fermat.

Dans ces conditions, nous avons jugé que la reproduction des différences purement orthographiques entre les sources et notre édition serait sans intérêt véritable pour le texte français (³) et qu'elle aurait au contraire le grave inconvénient de rendre excessivement pénible l'étude des variantes qui concernent soit le sens soit la forme littéraire. Nous nous sommes donc limités à ces dernières, que nous avons relevées aussi scrupuleusement que possible.

De nous deux, M. Paul Tannery s'est plus spécialement chargé de soigner

(¹) Dans le n° 109, déjà publié avec l'orthographe de Fermat dans la *Correspondance de Huygens*, et dont nous n'avons pu collationner nous-mêmes l'original, nous avons introduit les formes modernes; d'autre part, dans les lettres d'un intérêt scientifique, pour ne pas compliquer inutilement la lecture, nous avons distingué l'*i* et le *j*, l'*u* et le *v*. Il suffit de rappeler que, dans l'orthographe ancienne, les différences de figure pour ces lettres ne correspondent à aucune distinction entre la voyelle et la consonne. La forme *j* sert couramment pour les majuscules manuscrites, arbitrairement pour les minuscules finales; Fermat ne paraît pas avoir eu l'habitude de l'employer dans ce dernier cas. La forme *v* est régulièrement usitée, dans les textes manuscrits et imprimés, pour les majuscules et les initiales minuscules, la forme *u* pour les médianes et finales minuscules; dans l'écriture de Fermat, ces deux formes se distinguent très difficilement.

(²) Dans cette édition, la réforme de l'orthographe est déjà très avancée; l'*i* et le *j*, l'*u* et le *v* sont distingués; l'*s* muette est remplacée par un accent, sauf dans le verbe *être* et dans quelques autres mots particuliers; on doit noter *oint* pour *oient*, dans les finales des verbes.

(³) Nous avions entrepris une étude spéciale des formes orthographiques des *Varia*, dans l'espérance que les différences qui existent d'une lettre à l'autre pourraient permettre de distinguer diverses provenances entre les copies utilisées par Samuel Fermat: par exemple, si les lettres de Fermat à Mersenne formaient deux groupes d'orthographe distincte, on devrait en conclure qu'elles proviennent de deux collections différentes. Nos recherches n'ont pas abouti; les formes que l'on peut considérer comme propres aux sources des *Varia* sont relativement rares; l'édition est trop incorrecte et les différences orthographiques trop fréquentes dans une même lettre pour que l'on puisse déduire des conclusions certaines.

l'édition des lettres des années 1636 à 1645; M. Charles Henry de celles des années 1646 à 1664.

Il nous reste à signaler les quelques différences que présente le classement des pièces de la correspondance contenue dans ce Volume avec la liste chronologique publiée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de juin 1890 et encartée dans le Tome premier :

1° L'ordre des lettres 24 et 25 de la Liste a été interverti; la seconde lettre de Fermat à Mersenne sur la Dioptrique a été en effet écrite avant la première lettre de Descartes sur la méthode des tangentes (*voir* ci-après page 116, note).

2° La lettre 28 de la Liste, reconnue comme antérieure à la lettre 26, a pris le n° 25 *bis*, et a été remplacée par le Billet publié par Clerselier comme annexe à la lettre 27. Il y a des motifs pour croire que ce Billet n'a pas été réellement envoyé à Mersenne avec la lettre en question.

3° La pièce 38 de la Liste a pris le n° 38 *bis*, pour faire place à la lettre inédite de Frenicle à Mersenne que nous avons trouvée dans un Volume de la Correspondance de Mersenne, faisant partie du fonds Libri-Ashburnham; cette découverte nous a induits à penser que le Post-scriptum de la lettre 38 *bis* est en réalité d'une date antérieure à cette Lettre; mais cette conjecture ne nous a pas paru suffisamment établie pour que nous détachions ce Post-scriptum et en fassions une pièce à part.

4° La lettre de Huygens à Carcavi du 6 juillet 1656, publiée dans la *Correspondance de Huygens*, a été introduite sous le n° 77 *bis*.

5° La lettre inédite de Boulliau à Fermat a été introduite sous le n° 81 *bis*. Nous adressons tous nos remerciements à M. Lucien Auvray, de la Bibliothèque nationale, qui a bien voulu nous la signaler.

6° Les deux lettres de Fermat renfermées dans la pièce 90 de la Liste ont été désignées sous les n^{os} 90 et 90 *bis*.

En résumé, depuis la publication du Tome premier de cette édition, notre recueil de la Correspondance de Fermat a été augmenté de deux pièces inédites; nous renouvellerons, avec le ferme espoir d'être entendus, l'appel que nous avons déjà fait aux savants et aux amis de la Science qui pourraient nous fournir de nouveaux documents à utiliser dans le *Complément* de cette édition.

CORRESPONDANCE DE FERMAT.

CORRESPONDANCE DE FERMAT.

ANNÉE 1636.

I.

FERMAT A MERSENNE.

SAMEDI 26 AVRIL 1636.

(A f^{os} 10-11; B f^{os} 15vo-16.)

Mon Révérend Père,

1. Je vous reste beaucoup obligé de la faveur que vous me faites espérer de conférer par lettres ([1]), et n'est pas une des moindres obligations que j'aie à M. de Carcavi qui me l'a procurée. Je suis marri de ce que sans doute ma réponse aux points de votre Lettre ne vous satisfera pas, mais j'aime mieux paroitre ignorant en vous répondant mal, qu'indiscret en ne vous répondant point du tout.

2. J'ai toujours cru qu'il étoit bien malaisé de secouer et détruire les principes des Sciences, car, étant fondés sur l'expérience laborieuse de ceux qui les ont recherchés, il semble qu'il est bien malaisé d'en faire de plus précises, et il est encore plus inutile d'appeler la raison au secours des sens, puisque, dans ses opérations, elle présuppose toujours celles des sens exactes et véritables.

([1]) Il est clair que cette Lettre est la première que Fermat ait écrite à Mersenne, en répondant d'ailleurs à une Lettre de ce dernier, qui est perdue.

3. De sorte que, par mon sentiment et par ces raisons, j'estime qu'il seroit bien malaisé de trouver une proportion différente de la double qui fît l'octave plus exactement que celle-là. Je vous avoue bien qu'il y en a infinies, qui effectivement feront des accords différents et desquels néanmoins la différence ne sera pas comprise par l'ouïe la plus délicate qui puisse être; et de là on pourroit conclure que peut-être la vraie octave ne consiste pas précisément en la proportion double. Mais, puisque, en ce principe que les Anciens nous ont baillé, nous n'avons jusques à présent su découvrir d'erreur sensible, rendons-leur ce respect de le croire véritable, jusques à ce que le contraire nous ait apparu.

4. Peut-être que, comme on a trouvé des lunettes qui rendent visibles les choses qui ne l'étoient pas auparavant, et qui nous font connoître les différences les plus menues et les plus subtiles, on trouvera quelque instrument qui fera tomber les sons les plus proches sous des différences remarquables et sensibles à l'ouïe.

5. Or, de chercher par raison pourquoi l'octave est en proportion double, c'est, ce me semble, traiter des choses hétérogènes : le son de l'octave est l'accident et la qualité de la proportion double qui consiste en quantité. La proportion se comprend par la vue; l'accord qu'elle fait, par l'ouïe; et ainsi il semble qu'on ne sauroit assigner une raison nécessaire pourquoi est-ce que l'un convient à l'autre. Car, comme vous savez, les raisons démonstratives s'arrêtent toujours entre des sujets homogènes. De sorte qu'il vaut mieux laisser décider aux sens toutes les questions de votre Lettre, que d'altérer des maximes reçues et qu'on ne sauroit convaincre de faux.

6. Il y a bien quelque chose sur quoi peut-être je pourrois vous donner des raisons plus précises, mais ce sera une autre fois. Je me contenterai cependant de vous avoir fait voir les effets de mon obéissance, bien qu'ils me soient désavantageux.

7. Vous m'obligerez beaucoup de me faire savoir si M. de Beaugrand est à Paris. C'est un homme duquel je fais une estime très sin-

gulière; il a l'esprit merveilleusement inventif, et je crois que sa Géostatique (¹) sera quelque chose de fort excellent. Je lui écrirai dès que vous m'aurez donné de ses nouvelles.

8. Je serai aussi bien aise d'apprendre par votre moyen tous les Traités ou Livres nouveaux de Mathématiques qui ont paru depuis cinq ou six ans.

9. Je vous envoierai l'*hélice* (²) que vous me demandez, par la première commodité.

10. Et vous dirai cependant que j'ai rétabli entièrement le Traité d'Apollonius : *De locis planis* (³). Il y a six ans que je donnai à M. Prades, que peut-être vous connoissez, la seule copie que j'en avois, écrite de ma main. Il est vrai que la question la plus difficile et la plus belle, que je n'avois pas encore trouvée, y manquoit. Maintenant le Traité est de tous points accompli, et je vous puis assurer qu'en toute la Géométrie, il n'y a rien de comparable à ces propositions. J'en ai fait voir quelqu'une à M. de Beaugrand.

11. J'ai trouvé aussi beaucoup de sortes d'analyses pour divers problèmes tant numériques que géométriques, à la solution desquels l'analyse de Viète n'eût su suffire.

De tout cela, je vous en ferai part quand vous voudrez, et ce sans nulle ambition, de laquelle je suis plus exempt et plus éloigné que tous les hommes du monde.

12. Je voudrois pourtant qu'il vous plût, sans me nommer, proposer aux plus habiles de delà les deux questions suivantes à soudre, pour

(¹) Joannis | de Beaugrand | Regi Franciæ Domui | Regnoque ac ærario | sanctiori a consiliis secretisque | Geostatice | seu | de vario pondere gravium | secundum varia a terræ < centro > | intervalla | Dissertatio mathematica | . — Apud Tussanum Du Bray, via | Jacobæa, sub Spicis maturis | M.DC.XXX.VI. — (Bibl. Nat., V 122, f°). — La dédicace, à Richelieu, est datée du 20 avril 1636.

(²) *Voir* ci-après Lettre III, 3.

(³) *Voir* Tome I, pages 3 à 51. — Il semble que la proposition que Fermat n'a trouvée qu'en dernier lieu soit la septième du Livre I (T. I, p. 24); il avait en effet achevé le Livre II dès 1629. *Voir* ci-après Lettre XXI, 3.

ce que leur solution dépend d'une méthode particulière que j'ai trouvée, de laquelle je ne ferai plus tant d'état, si vous trouvez quelqu'un qui les puisse soudre géométriquement ([1]).

PRIMA. — *Datæ sphæræ inscribere conum rectum omnium inscribendorum ambitu maximum.*

SECUNDA *idem proponit de cylindro quod superior de cono.*

Je ne prétends pas par là vous exclure du nombre de ceux qui chercheront la solution de ces deux questions.

J'attends de vos nouvelles et suis, mon Révérend Père, votre très humble serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 26 avril 1636.

II.

PROPOSITIO GEOSTATICA

DOMINI DE FERMAT ([2]).

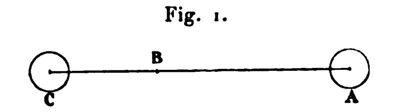
< MAI 1636 >

(*Va.*, p. 143-144.)

1. *Sit centrum Terræ* B (fig. 1), *semidiameter* BA, *portio alterius semidiametri* BC, *et fiat*

ut AB *ad* BC, *ita pondus appensum in* C *ad pondus appensum in* A :

Fig. 1.



Aio pondera A, C *non moveri, sed fieri æquilibrium.*

([1]) *Voir* Tome I : la solution analytique de la première de ces deux questions, pages 155 et suiv ; la solution géométrique de la seconde, envoyée à Mersenne le 10 novembre 1642, pages 167 et suiv.

([2]) Cette proposition a été envoyée par Fermat à Carcavi (*voir* ci-après Lettre VI, 2)

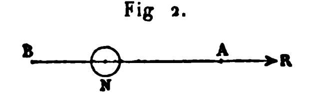
Hæc autem propositio probatu est facillima, vestigiis Archimedis (¹) insistendo, et, si negetur, statim demonstrabitur.

2. Hoc supposito, propositionem sane mirabilem inde deducimus : *Ponatur grave in puncto* N (fig. 2) *inter puncta* A *et* B, *et fiat*

ut AB *ad* BN, *ita pondus* N *ad potentiam* R :

Aio pondus N, *juncto axe* AN, *a potentia* R *in puncto* A *collocata deti-*

Fig 2.



neri et, si minimum augeatur potentia R, *sursum tolli, ideoque quò propius pondus accedit ad centrum Terræ, minorem potentiam ad tollendum illud requiri.*

Hæc est, ni fallor, propositio quam Beaugrandus (²) in sua Geostatica demonstrat; nos eam hac ratione, quæ sequitur, demonstramus.

dans une lettre perdue, où il le priait sans doute de la communiquer à Mersenne. Fermat l'avait composée avant d'avoir pris connaissance de la Géostatique de Beaugrand, par conséquent avant la lettre suivante, du 3 juin 1636 (*voir* ci-après III, 5).

Mersenne en a inséré dans son *Harmonie universelle* une traduction assez fidèle, que nous reproduisons ci-après (II_A). Elle permet de constater une confusion dans les *Varia*, où les trois premiers articles sont rattachés à la pièce V ci-après, et où le titre du morceau est inséré après l'énoncé même de la proposition, c'est-à-dire avant l'article 3 : *Suppositis et concessis etc.*

(¹) Si l'on compare la marche que suit Archimède (*De planorum æquilibriis*, I) pour démontrer le principe d'équilibre de la balance, on reconnaît que Fermat admet en fait comme postulats :

1° Que la direction de la gravité passe constamment par un point déterminé hors du corps pesant, à savoir par le centre de la Terre;

2° Que le point d'application de la gravité (au moins pour un corps sphérique homogène) est un point déterminé de la figure du corps pesant;

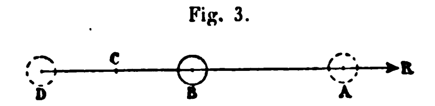
3° Que l'effet statique de la gravité, pour un corps déterminé, dépend uniquement de la distance de son centre de gravité au centre de la Terre.

Fermat ne suppose pas d'ailleurs que la gravité s'exerce en dehors de la sphère terrestre; dans ces limites, ses postulats concordent avec l'hypothèse newtonienne, si l'on considère la gravité comme la résultante de l'attraction d'une sphère composée de couches concentriques et homogènes sur un point matériel situé à son intérieur.

(²) *Voir* la Lettre I, 7. La *Géostatique* de Beaugrand a pour objet de démontrer que la gravité (supposée seulement à l'intérieur de la sphère terrestre) varie, pour un même

3. Suppositis et concessis quibus in demonstratione utimur, ex præcedente propositione et ex communibus notionibus desumptis, sit centrum Terræ C (*fig.* 3), semidiameter CA in qua sumatur punctum

Fig. 3.



B. In puncto autem B sit quodvis grave appensum; fiat autem

ut recta CA ad rectam CB,
ita pondus in B appensum ad potentiam aliquam, ut R.

Aio grave B a potentia R in puncto A sustineri et, si augeatur quantumlibet potentia R, pondus B ab hujusmodi aucta potentia in puncto A collocata sursum moveri.

Producatur enim AC in D, et sit CD æqualis CB, et in D collocetur pondus ponderi B æquale. Corporis igitur ex duobus gravibus B et D compositi centrum gravitatis est C, ideoque, si a puncto A auferatur

corps, proportionnellement à la distance de son centre de gravité au centre de la Terre. C'est donc, en fait, la même thèse que celle de Fermat, quoique ce dernier établisse une distinction assez subtile (*voir* ci-après Lettre IV, 1). Mais la démonstration de Beaugrand est absolument manquée comme fond et comme forme, et elle donnera lieu, dans la correspondance entre Mersenne et Descartes, à de fréquentes railleries de ce dernier contre le *géostaticien*.

Cette démonstration revient en fait à admettre que, si un corps pesant est suspendu par un fil sans gravité à l'extrémité d'un levier parallèle à l'horizon et maintenu d'ailleurs en équilibre, cet équilibre ne sera jamais détruit, quand même on allongerait, autant que l'on voudra, le fil de suspension supposé dirigé vers le centre de la Terre.

L'erreur d'une pareille thèse est aisée à reconnaître; mais il convient d'observer qu'à la date où nous sommes, les principes de la Statique ne sont nullement établis; on est même à peine d'accord sur les conditions d'équilibre du levier actionné par des forces parallèles, car la question qui s'agite est précisément de savoir si les postulats d'origine expérimentale sur lesquels repose la théorie d'Archimède sont vrais en prenant les forces de gravité concourantes, ainsi qu'elles le sont en réalité, ou en les supposant parallèles, avec le géomètre de Syracuse. Beaugrand admet la première alternative jusque dans ses conséquences évidemment erronées; Fermat suit la même voie, mais avec une prudence très caractéristique. Roberval défendra l'hypothèse d'Archimède (*ci-après* Lettres VIII, XIV); mais Galilée et Castelli, quoique déjà en possession, comme Roberval, du principe de l'équilibre du levier actionné par des forces concourantes, n'en ont pas moins pris en sérieuse considération les conclusions de Beaugrand et les propositions de Fermat (*voir* ci-après, Pièce V, note 6).

potentia R, quum recta BA nihil ponderet, erunt pondera B et D in æquilibrio et manebunt.

Si autem in A collocetur pondus deorsum tendens, potentiæ R sursum moventi æquale, idem est ac si a puncto A dematur potentia R; nam, quantum potentia tollit, tantumdem pondus deprimit. Collocetur igitur hujusmodi pondus in A : corpus igitur compositum ex potentia R collocata in A et sursum movente, ex pondere A deorsum tendente et ex gravibus B et D, erit in æquilibrio aut, si mavis, non movebitur.

Quum autem grave D sit æquale gravi B, et recta CD rectæ CB, erit

ut AC ad CD, ita AC ad CB,

et

ut pondus B ad potentiam R in A collocatam,
ita pondus D ad pondus in A deorsum tendens,

quod ipsi R potentiæ æquale posuimus. Est autem, ex hypothesi,

ut recta AC ad CB, ita pondus B ad potentiam R in A collocatam :

erit igitur

ut AC ad CD, ita pondus D ad pondus in A deorsum tendens.

Quum igitur distantiæ ponderibus sint reciproce proportionales, pondus in A deorsum tendens ponderi D æquiponderabit; si vero ab æquiponderantibus æquiponderantia auferantur, reliqua æquiponderabunt : ergo, si ab æquilibrio ex potentia R in A collocata et sursum movente, ex pondere in A deorsum tendente et ponderibus B et D composito, auferatur æquilibrium ex ponderibus A et D compositum, reliqua æquiponderabunt aut potius non movebuntur.

Auferantur igitur pondus A et pondus D; remanebit potentia R, in A collocata, et pondus B, quod proinde potentia R detinebit, ideoque, si minimâ augeatur vi, sursum tollit. Quod erat demonstrandum.

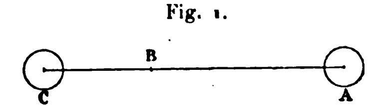
II$_A$.

MERSENNE, *Seconde Partie de l'Harmonie Universelle* (1637), livre VIII : De l'utilité de l'Harmonie, prop. XVIII, pages 61 et suiv. ([1]).

... Or, puisque Monsieur Fermat, Conseiller au Parlement de Tholose et très-excellent Géomètre, m'a donné le raisonnement qu'il a fait sur les différentes pesanteurs des poids, suivant qu'ils approchent davantage du centre..., je veux faire part au public de ses pensées sur ce sujet.

Soit donc le centre de la Terre dans la ligne droite AC (*fig.* 1), au point B;

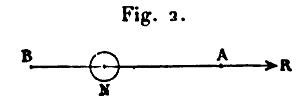
Fig. 1.



le demi-diamètre BA; et BC soit une portion de l'autre demi-diamètre. Et que le poids attaché au point C soit au poids attaché au point A comme AB à BC : je dis que les poids A, C seront en équilibre. Ceci étant posé, il en déduit la conclusion précédente, à savoir que la pesanteur d'un corps est d'autant moindre qu'il s'approche davantage du centre de la Terre.... Je mets ici le raisonnement entier de Monsieur Fermat.

Soit donc mis le poids entre A et B au point N (*fig.* 2); et comme A<B>

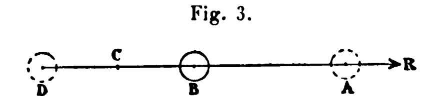
Fig. 2.



est à BN, ainsi soit le poids N à la puissance R : je dis que le poids N, joint à A par la ligne NA ([2]), est détenu par la puissance R mise au point A, et que si l'on augmente tant soit peu la puissance R, elle l'enlèvera; par conséquent, il faut une puissance d'autant moindre pour l'enlever, qu'il approche davantage du centre de la Terre.

Ce qu'il démontre en cette façon : Que C (*fig.* 3) soit le centre de la Terre,

Fig. 3.



le demi-diamètre CA, auquel soit pris le point B, dans lequel le poids attaché soit à la puissance R comme AC à CB : je dis que le poids B est soutenu par

([1]) *Voir* la note 2 de la page 6, second alinéa.

([2]) joint à BA par la ligne BA *Mersenne*.

la puissance R mise en A, laquelle l'enlèvera, pour peu qu'on l'augmente. Car soit prolongé AC jusques à D, et que CD soit égal à CB, et que l'on mette un poids en D égal au poids B, C sera le centre de pesanteur du corps composé des deux poids B et D; c'est pourquoi, si du point A l'on ôte la puissance R, les poids B et D demeureront en équilibre, puisque la ligne BA ne pèse point. Et si l'on met le poids en A qui tende en bas, égal à la puissance R qui tend en haut, l'on fait la même chose que si du point A l'on ôtoit la puissance R, puisque le poids abaisse autant comme la puissance enlève.

Que ce poids soit donc mis en A; donc le corps composé de la puissance R posée en A et tendant en haut, du poids A tendant en bas, et des poids B et D, demeurera en équilibre. Or puisque le poids D est égal au poids B, et que la ligne CD est égale à la ligne CB, AC est à CB comme AC à CD; et comme le poids B est à la puissance R mise en A, ainsi le poids D au poids mis en A qui tend en bas (lequel on suppose égal à la puissance R). Or, comme AC est à CB, ainsi le poids B à la puissance R posée en A; donc, comme AC à CD, ainsi le poids D au poids mis en A. Et par conséquent le poids mis en A sera en équilibre avec le poids D, puisque les distances sont en proportion réciproque des poids. Mais si l'on ôte des poids qui sont équilibres, d'autres poids qui sont aussi en équilibre, ceux qui resteront demeureront aussi en équilibre; donc si, de l'équilibre fait de la puissance R mise en A et tendant en haut, du poids mis en A tendant en bas, et des poids B et D, l'on ôte l'équilibre fait des poids A et D, les poids qui resteront demeureront en équilibre.

Soient donc ôtés les poids A et D, la puissance R mise en A et le poids B demeureront en équilibre, et partant, pour peu que l'on augmente la puissance R, elle enlèvera le poids B : ce qu'il falloit démontrer.

III.

FERMAT A MERSENNE.

MARDI 3 JUIN 1636.

(*Va*, p. 121-122.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. J'ai reçu votre lettre avec satisfaction, puisqu'elle contient des remarques et des expériences très singulières : j'en ferai l'estime que je dois et de tout ce qui me viendra de votre part.

2. Je n'ai point vu de livre de musique plus nouveau de vous que celui que vous appelez *Questions harmoniques*, que j'ai, relié avec un autre recueil de *Questions* et les *Méchaniques* de Galilæi (¹).

3. Si la démonstration de la proposition de l'hélice (²) n'étoit pas de grand discours et de grande recherche, je vous l'envoierois présen-

(¹) Il a paru, en 1634, deux Volumes différents de *Questions* du P. Mersenne, tous deux petit in-octavo.

Le premier — *A Paris, chez Iaques Villery, ruë Clopin à l'Escu de France, et au coin de la ruë Dauphine aux trois Perruques, M.DC.XXXIIII. Avec Privilege du Roy.* — Sans nom d'auteur (le privilège, du 14 août 1629, est délivré au R. P. M. R. M.; l'achevé d'imprimer est du 1er décembre 1633) — contient (Bibl. Nat. Imprimés V 2141, Inventaire V 19294/5) : 4 A

a) Questions inouyes, ou Recreation des scavans. Qui contiennent beaucoup de choses concernantes la Theorie (Théologie?), la Philosophie, et les Mathematiques (180 pages);

b) Questions harmoniques. Dans lesquelles sont contenuës plusieurs choses remarquables pour la Physique, pour la Morale, et pour les autres Sciences (276 pages).

Le second — *A Paris, chez Henry Guenon, ruë Sainct Iacques, prés les Iacobins, à l'image Sainct Bernard M.DC.XXXIV. Avec Privilege et Approbation.* — (Privilège d'août 1634, épîtres dédicatoires signées de Mersenne) — renferme (Bibl. Nat. Imprimés V 2675, Inventaire V 25150/1/2) :

c) Les Questions Theologiques, Physiques, Morales et Mathematiques. Où chacun trouvera du contentement ou de l'exercice, Composees par L. P. M. (240 pages);

d) Les Mechaniques de Galilée Mathematicien et Ingenieur du Duc de Florence, Avec Plusieurs Additions rares et nouvelles, utiles aux Architectes, Ingenieurs, Fonteniers, Philosophes et Artisans. Traduites de l'Italien par L. P. M. M. (88 pages);

e) Les Preludes de l'Harmonie Universelle, ou Questions Curieuses, Utiles aux Predicateurs, aux Theologiens, aux Astrologues, aux Medecins et aux Philosophes. Composees par L. P. M. M. (224 pages).

C'est évidemment ce second volume que possède Fermat et c'est le dernier recueil (*e*) qu'il désigne improprement sous le titre de *Questions harmoniques*.

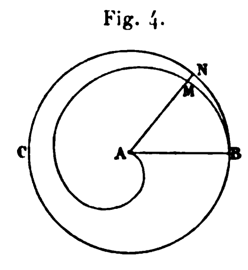
(²) *Voir* Lettre I, **9**. — L'envoi promis ici par Fermat ne se retrouve pas dans ses Lettres à Mersenne, mais il fut fait avant le 4 novembre 1636 (*voir* Lettre XV, **6**), et d'autre part, en rapprochant les extraits ci-après III_A et III_B des Œuvres de Mersenne, on reconnait aisément que ce dernier nous a conservé, dans le second de ces extraits, une partie du travail de Fermat, suffisante pour que l'on puisse en apprécier toute l'importance. On peut constater également que l'hélice dont parle Fermat dans ses Lettres I, **9**, et III, **3** n'est autre que celle qu'il désigne sous le nom d'*helix Galilei* (et non *Baliani*, fausse leçon de Bossut) dans la *Solution du problème proposé par Etienne Pascal* (Tome I, pages 73-74), pièce dont la date semble devoir être assignée en janvier ou février 1637. Cette *spirale de Galilée*, nom probablement donné par Mersenne, peut être définie la courbe décrite, relativement à la Terre supposée animée du mouvement de rotation diurne, par un point matériel pesant tombant librement suivant la loi de Galilée. Le problème de cette trajectoire préoccupait particulièrement le savant Minime et, dès sa première lettre à Fermat, il avait dû lui demander ses lumières sur cette question. — Il ne paraît pas douteux que l'écrit perdu ait été rédigé en latin.

tement; mais elle contiendra autant que deux des plus grands Traités d'Archimède, de sorte que je vous demande un peu de loisir pour cela et cependant vous la pouvez tenir pour très véritable.

4. J'en dresserai un Traité exprès, où je vous ferai voir de nouvelles hélices aussi admirables qu'on en puisse imaginer; pour vous en donner l'avant-goût, en voici une, qui est peut-être cette ligne que Ménélaüs appelle *admirable* dans le Pappus (¹).

Esto helix AMB (fig. 4) *in circulo* CNB, *cujus ea sit proprietas ut, ductâ qualibet rectâ, verbi gratia* AMN, *tota circuli circumferentia sit*

Fig. 4.

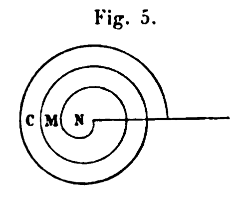


ad ejusdem circumferentiæ portionem NCB *ut* AB *quadratum ad quadratum* AM.

In hoc autem hæc helix differt ab helice Archimedis quod, in helice Archimedis, sit ut circumferentia ad portionem NCB, *ita* AB *ad* AM.

Pronunciamus : primo, spatium sub helice et recta AB *comprehensum esse dimidium totius circuli; deinde (quæ est proprietas mirabilis), spatium ex prima revolutione ortum (quod hîc sit* N*) (fig. 5) esse dimidium*

Fig. 5.



spatii M *ex secunda revolutione orti; spatium vero* C *ex tertia revolutione*

(¹) *Pappus*, IV, 36, édition Hultsch, page 270, 26. — La supposition de Fermat est très peu probable.

ortum esse æquale spatio M, *et omnia omnino deinceps spatia ex qualibet revolutione orta dicto spatio* M *similiter esse æqualia, ideoque et inter se.*

Je crois que vous m'avouerez que ces recherches sont belles, mais j'ai si peu de commodité d'en écrire les démonstrations qui sont des plus malaisées et des plus embarrassées de la Géométrie, que je me contente d'avoir découvert la vérité et de savoir le moyen de la prouver lorsque j'aurai le loisir de le faire. Si je puis trouver quelque occasion d'aller passer trois ou quatre mois à Paris, je les emploierai à mettre par écrit toutes mes nouvelles pensées en ces arts, à quoi je pourrai sans doute être beaucoup aidé de vos soins.

5. J'ai vu la *Géostatique* de M. de Beaugrand ([1]) et me suis étonné d'abord d'avoir trouvé ma pensée différente de la sienne; j'estime que vous l'aurez déjà remarqué. Je lui envoie franchement mon avis sur son livre, vous assurant que j'estime si fort son esprit et qu'il m'en a donné de si grandes preuves, que j'ai peine à me persuader qu'ayant entrepris une opinion contraire à la sienne, je ne me sois éloigné de la vérité; je consens pourtant qu'il soit mon juge et ne vous récuse pas non plus. Et parce que j'ai écrit à la hâte la démonstration que je vous envoyai et l'écrit que je lui envoie ([2]), je mettrai tout au net à loisir et tâcherai même de trouver de nouvelles raisons pour soutenir mon opinion, à laquelle pourtant je ne m'attacherai jamais par opiniâtreté dès qu'il me fera connoître le contraire.

Je suis etc.

(1) *Voir* Lettres I, 7, II, 2.

(2) Écrit de Fermat perdu, comme toute sa correspondance avec Beaugrand. — La démonstration envoyée à Mersenne n'est autre que la pièce précédente, II, ou peut-être la rédaction en français de la même pièce, II_A. Cependant on ne peut conclure du langage de Fermat que l'envoi a été fait directement à Mersenne et que, par suite, il y aurait eu une lettre perdue intermédiaire entre I et III (*voir* Pièce II, note 2 de la page 6).

III$_A$.

MERSENNE, *Seconde Partie de l'Harmonie Universelle* (1637), Nouvelles Observations Physiques et Mathématiques. Première Obs. page 2 :

La seconde chose qu'il est à propos de remarquer appartient à la demie circonférence dont je parle au même lieu (1) : car, outre ce que j'ai montré de la ligne hélice, par laquelle les poids descendent suivant l'imagination de Galilée, un excellent Géomètre a démontré les propriétés de cette hélice, laquelle lui pourra servir d'occasion pour restituer le livre de Démétrius, περὶ γραμμικῶν ἐπιστάσεων, dont Pappus (2) a parlé dans le 4. l. de ses Collections. Je dirai seulement qu'il y remarque (3) une raison perpétuelle de 15 à 8 : ceux qui en voudront savoir un plus grand nombre de particularités, les peuvent espérer de cet excellent personnage. Il a trouvé plusieurs autres nouvelles hélices, dont l'une est peut-être l'admirable de Ménélaüs (4), de laquelle le premier espace fait par la première révolution est sous double de celui de la seconde; et néanmoins tous les autres espaces suivans produits par les autres révolutions sont égaux à celui de la seconde révolution et par conséquent égaux entre eux. Je laisse les autres propriétés, dont il donnera la démonstration quand il lui plaira.

III$_B$.

MERSENNE, *Cogitata Physico-mathematica* (1644) — Ballistica, page 57.

1. Cùm Galilæus existimare videretur lapidem (positâ terrâ mobili et solis motum supplente) usque ad terræ centrum descendentem moveri per semi-circumferentiam.... de quâ superius (5) dictum est, demonstravit acutissimus Geometra D. Fermatius non esse descensum illum semicircularem, sed helicem describere peculiarem, quæ sit secunda inter sequentes, quemadmodum prima est Archimedea.

(1) Livre II du Mouvement des Corps, prop. III, pages 93 et suiv. — Galilée avait dit (*Massimi Sistemi*, 1632, p. 156 suiv.) qu'il était probable qu'un corps, tombant sans empêchement jusqu'au centre de la terre, décrirait, en tenant compte du mouvement de la terre, une demi-circonférence. Mersenne réfutait cette opinion.

(2) PAPPUS, IV, 36, édition Hultsch, page 270, 20.

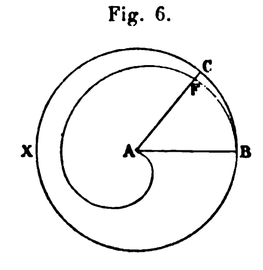
(3) *Voir* ci-après la pièce III$_B$, 2.

(4) *Voir* Lettre III, 4.

(5) Page 50 des *Ballistica* de Mersenne.

2. Sit igitur helix AFB (*fig.* 6) intra circulum BCX descripta, ita ut semper sit eadem ratio circumferentiæ BCX ad arcum BC, quæ est lineæ AB ad FC, vel quadrati AB ad quadratum FC, vel cubi AB ad cubum FC, vel cujuscumque alterius potestatis (¹) AB ad similem potestatem FC, regula generalis

Fig. 6.



datur, quâ ratio circuli BCX ad spatium lineâ AB et helicibus AFB comprehensum reperiatur (²).

Hîc appono octo helices quarum majores numeri circulum, minores helicem referunt :

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
3 1	15 8	14 9	45 32	33 25	91 62	60 49	153 128

3. Quibus placet addere demonstrationem amici (³), qui demonstravit lineam descensûs gravium non esse circularem....., sufficiat annotasse

(¹) Potentiæ *Mersenne.*

(²) Mersenne a fait ici quelque confusion; les spirales qu'il vient de définir ont pour équation polaire

$$\left(\frac{R-\rho}{R}\right)^n = \frac{\omega}{\Omega} \qquad (\Omega = 2\pi);$$

celles auxquelles se rapportent les nombres qui suivent et dans lesquelles doit d'ailleurs figurer comme seconde ($n = 2$) la trajectoire étudiée par Fermat, ont, au contraire, pour équation

$$\frac{R-\rho}{R} = \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^n.$$

Fermat a sans doute considéré les deux classes; pour la seconde, le rapport de l'aire de la spirale $\int_{\rho=0}^{\rho=R} \rho^2 \frac{d\omega}{2}$, au secteur de cercle correspondant $\frac{\Omega R^2}{2}$, est $= \frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)}$, formule dans laquelle rentrent les nombres donnés par Mersenne.

(³) La démonstration qui suit (en partie seulement) dans le texte de Mersenne ne peut être attribuée à Fermat.

lineam istam descensûs gravium rectam sub polis futuram; planam helicem sub æquatore; et in omni alio loco solidam helicem super coni isoscelis superficie descriptam, cujus basis est parallelus, à quo descensus incipit, et vertex ipsum terræ centrum.

4. Quam demonstrationem libenter postulantibus communicabo, quemadmodum aliam elegantissimam à D. Fermatio inventam et ad ipsum missam Galilæum (1), quà demonstrat spatium ab ista comprehensum helice esse, vel ad circuli sectorem, vel ad totum circulum quibus comprehenditur, ut 8 ad 15; quæ proportio reperitur similiter intra spatium à spirali circa coni superficiem descriptum et ipsam coni superficiem.

IV.

FERMAT A MERSENNE.

MARDI 24 JUIN 1636.

(*Va*, p. 122-123.)

Mon Révérend Père,

1. Je suis marri de n'avoir pu vous faire précisément comprendre mes sentimens touchant ma *Proposition Géostatique* (2); il est pourtant vrai que je n'avois garde de la prendre au sens que vous avez cru, car la seule raison que j'ai employée contre l'opinion de M. de Beaugrand, ç'a été celle-là même que j'ai trouvée dans votre Lettre, de sorte que je

(1) Galilée répondit à cet envoi par une lettre du 15 juin 1638 à Mersenne dont une traduction française se trouve dans le MS. de la Bibl. Nat. fr. nouv. acq. 6204; dans cette lettre, Fermat se trouve simplement désigné sous les termes : « votre amy ». Dans les manuscrits de Galilée, on ne retrouve aucune autre trace de rapports entre lui et Fermat que ce passage d'une lettre d'Elia Deodati du 14 juillet 1637 :

« Al Signor Carcavi essendo tornato di fuora, ho dato la lettera di V. S., della quale è » restato sodisfattissimo per la soluzione delle objezzioni fatte avanti dal suo amico, il » quale anco lui dovrà restare appagato quando lo vedrà. Il nome suo è Mr Fermat, Con- » sigliere del Parlamento di Tolosa, dove resiede. » (Bibliothèque Nationale Centrale de Florence. — MM. Galiléens, P. V., T. vi, f° 79v°.)

Nous devons ce renseignement à l'obligeance de M. A. Favaro.

(2) Ci-devant, Pièce II.

n'avois garde de tomber dans un inconvénient que j'avois prévu et condamné.

J'estime donc que tout grave, en quel lieu du monde qu'il soit, hormis dans le centre, pris en soi et absolument, pèse toujours également, et c'est une proposition que j'aurois aisément prise pour principe, si je ne la voyois contestée. Je tâcherai donc à la prouver; mais, qu'elle soit vraie ou non, cela n'empêche pas la vérité de ma *Proposition*, qui ne considère jamais le grave en soi, mais toujours par relation au levier, et ainsi je ne mets rien dans la conclusion qui ne se trouve dans les prémisses.

Or l'équivoque, sans doute, est venue de ce que je ne vous ai pas assez expliqué les nouvelles pensées que j'ai sur le sujet des Méchaniques et lesquelles vous verrez grossièrement crayonnées sur le papier que je vous envoie (1); c'est pourtant à la charge que vous m'obligerez de ne les communiquer à personne et que vous me donnerez le loisir pour en faire les démonstrations exactes ou plutôt pour les mettre au net, car elles sont déjà faites.

L'erreur d'Archimède, si pourtant nous la pouvons nommer ainsi, provient de ce qu'il a pris pour fondement que les bras de la balance arrêteroient, quoiqu'ils ne fûssent pas parallèles à l'horizon, de quoi j'ai démontré le contraire.

Si vous examinez de nouveau la 6me et la 7me des *Equipondérans* (2), vous trouverez que je ne me trompe pas et que sa démonstration est toute fondée sur cette supposition.

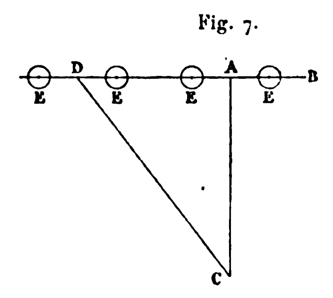
Car soit le levier EDB (*fig.* 7), duquel le centre A, celui de la terre C. Archimède, pour démontrer la proportion réciproque des poids, les divise en parties égales, comme E, et les attache en distances égales le long du levier. Or, il suppose que le centre de gravité de deux poids est au point qui divise leur intervalle également, et cela

(1) Ci-après, Pièce V.

(2) ARCHIMÈDE, *De planorum æquilibriis* I : Les propositions 6 et 7 démontrent la réciprocité des rapports entre les poids suspendus à un levier en équilibre et les longueurs des bras de levier; la première dans le cas de la commensurabilité, la seconde dans le cas de l'incommensurabilité des rapports.

est bien vrai aux deux poids qui sont autour du point A, parce que la ligne AC étant perpendiculaire au levier, les poids E autour du point A se trouvent également éloignés et du centre du levier et de celui de la terre et, par conséquent, ils se trouvent d'égale inclination.

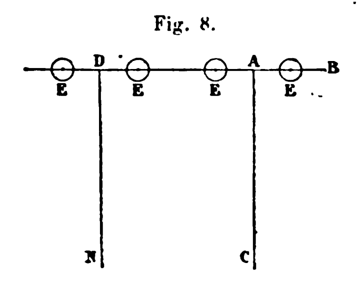
Fig. 7.



Mais si, dans le même levier, vous prenez le point D qui divise l'intervalle des deux graves E également, en ce cas le point plus éloigné du centre du levier est aussi le plus éloigné du centre de la terre, et ainsi le point D avec les deux poids E représente une balance, de laquelle les bras ne sont pas parallèles à l'horizon.

Mais si la descente des graves se faisoit par lignes parallèles, comme en cette figure (*fig.* 8) par les lignes AC et DN, en ce cas, la proposi-

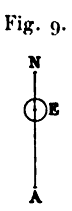
Fig. 8.



tion d'Archimède seroit vraie : ce n'est pas que dans l'usage elle manque sensiblement, mais il y a plaisir de chercher les vérités les plus menues et les plus subtiles et d'ôter toutes les ambiguïtés qui pourroient survenir. C'est ce que j'ai fait très exactement et je vous puis assurer que, quoique la recherche en soit bien malaisée, j'en possède toutes les démonstrations parfaitement.

Soit le centre de la terre A (*fig.* 9), le grave E au point E, et le point N dans la superficie ou ailleurs, plus éloigné du centre que le point E. Je ne dis pas que le point E pèse moins étant en E que s'il étoit en N, mais je dis que, si le point E est suspendu du point N

Fig. 9.



par le filet NE, la force étant au point N le retiendra plus aisément que s'il étoit plus proche de la dite force, et ce, en la proportion que je vous ai assignée.

Je crois vous avoir suffisamment expliqué ma pensée sur ce sujet.

2. Pour la question (¹) des nombres dont vous me parlez, si vous m'en faites part, je tâcherai de la résoudre.

3. J'envoyai, il y a déjà longtemps, la proposition des parties aliquotes (²) à M. de Beaugrand, avec la construction pour trouver infinis nombres de même nature. S'il ne l'a pas perdue, il vous en fera part.

4. Je vous prie de relire ma proposition des graves et de m'en dire votre avis.

Je suis etc.

IV$_A$.

MERSENNE, *Harmonie Universelle* (1636), Préface générale (page 9 non numérotée).

.... Or, si je voulois parler des hommes de grande naissance ou qualité, qui se plaisent tellement en cette partie des Mathématiques qu'on ne sauroit peut-être leur rien enseigner, je répéterois le nom de celui à qui le livre de

(¹) *Voir* ci-après, Lettre VI, 7.
(²) *Voir* ci-après, IV$_A$ et IV$_B$, deux extraits des Ouvrages de Mersenne, probablement empruntés à cet écrit perdu que Fermat avait envoyé à Beaugrand.

l'Orgue est dédié ([1]) et ajouterois Monsieur Fermat, Conseiller au Parlement de Thoulouze, auquel je dois la remarque qu'il a faite des deux nombres 17296 et 18416, dont les parties aliquotes se refont mutuellement, comme font celles des deux nombres 220 et 284; et du nombre 672, lequel est sous double de ses parties aliquotes, comme est le nombre 120; et il sait les règles infaillibles et l'analyse pour en trouver une infinité d'autres semblables.

IV$_B$.

Mersenne, *Seconde Partie de l'Harmonie Universelle* (1637), Nouvelles Observations Physiques et Mathématiques, pages 26 et suiv.

XIII. OBSERVATION.

Des parties aliquotes de 120, *et des nombres amiables.*

Il faut ajoûter à ce que j'ai dit des parties aliquotes des nombres dans la dixième remarque de la première Préface générale, la méthode de trouver le nombre semblable à 120 dont je parle au lieu susdit. Il faut donc mettre tant de nombres de suite qu'on voudra en raison double en commençant par 2, comme sont les nombres A, B, C, D, E, F :

G,	H,	I,	K,	L,	M,
1,	3,	7,	15,	31,	63.
A,	B,	C,	D,	E,	F,
2,	4,	8,	16,	32,	64.
N,	O,	P,	Q,	R,	S,
3,	5,	9,	17,	33,	65,

desquels l'unité étant ôtée, l'on fasse les nombres G, H, I, K, L, M, et auxquels l'unité étant ajoûtée l'on fasse les autres nombres N, O, P, Q, R, S. Lorsque l'un des nombres G, H, I, K, L, M, par exemple K, divisé par le nombre N du dernier ordre, éloigné de quatre rangs à main gauche, produira un nombre premier, le triple de ce nombre premier, multiplié par le nombre du rang du milieu qui précède K immédiatement, donnera le nombre requis : comme l'on voit en 15 divisé par 3 d'où vient 5 nombre premier, dont le triple 15, multiplié par 8, fait 120 qui est le nombre que nous avons donné dans la Préface susdite.

([1]) Étienne Pascal.

L'autre exemple se voit en 63, lequel, divisé par 9, produit le nombre premier 7 dont le triple 21, multiplié par 32, fait 672, qui est l'autre nombre requis.

Quant aux deux nombres dont les parties aliquotes se refont mutuellement, il faut aussi mettre les nombres qui se suivent depuis 2 en progression géométrique :

2, 4, 8, 16, etc.

et puis il faut écrire des nombres triples dessous

6, 12, 24, 48,

desquels l'unité étant ôtée, restent

5, 11, 23, 47,

qu'il faut mettre dessus. Il faut enfin multiplier 6 par 12 en ôtant l'unité pour avoir 71; et 12 par 24, moins l'unité, pour produire 287; et 24 pour 48, moins l'unité, pour avoir 1151, qu'il faut disposer comme on les voit ici, jusqu'à l'infini

5,	11,	23,	47,
2,	4,	8,	16,
6,	12,	24,	48,
	71,	287,	1151.

Lorsque l'un des nombres du dernier ordre avec son opposé et le précédent du premier ordre seront nombres premiers, l'on trouvera des nombres semblables à ceux dont il est question. Par exemple, le nombre du dernier rang 71, et 11 du premier ordre, et 5 qui le précède sont nombres premiers. Ceci posé, si l'on multiplie 71 par 4, et semblablement 5 et 11 par le même 4, l'on aura les deux nombres 284 et 220, dont les parties aliquotes se refont mutuellement. De rechef, le nombre du dernier ordre 1151 est nombre premier, aussi bien que son opposé dans le premier rang 47 et le précédent 23. Il faut donc multiplier 16 par 1151, et puis 47 et 23 par le même 16 pour avoir les deux nombres requis : 18416 et 17296; et ainsi des autres jusques à l'infini.

V.

NOVA IN MECHANICIS THEOREMATA

DOMINI DE FERMAT.

< *Pièce jointe à la lettre précédente ou seconde rédaction envoyée à Carcavi.* >

(*Va*, p. 142-143.)

1. Fundamenta Mechanices non satis accurata tradidisse Archimedem fueram dudum suspicatus : supposuisse enim motus gravium descendentium inter se parallelos patet, nec vero absque hac hypothesi constare possunt ipsius demonstrationes. Non infitior quidem hypothesin hanc ad sensum proxime accommodari ; quippe, propter magnam a centro terræ distantiam possunt descensus gravium supponi paralleli non secus ac radii solares. Sed, veritatem intimam et accuratam quærentibus, hæc non satisfaciunt.

Generalis nempe vectium natura in quolibet mundi loco videtur consideranda et astruenda, ideoque nova in Mechanicis fundamenta e veris et proximis principiis accersenda. Hujus novæ Scientiæ propositiones tantum exhibemus, demonstrationes quum libuerit tradituri.

2. Duplex igitur vectium genus fingimus aut potius consideramus : unum cujus motus rectus tantum est, non circularis; alterum cujus extrema describunt circulos. De secundo hoc quæsitum tantum apud veteres; primum, quod longe videtur simplicius, ne agnoverunt quidem.

Singula exemplis illustramus, et prioris quidem centrum idem est cum centro terræ, posterioris centrum extra centrum terræ necessario debet collocari.

3. Sit igitur, in sequenti figura (*fig.* 10), centrum terræ punctum A, et intelligatur recta CB transire per punctum A; imo et ipsa CB in-

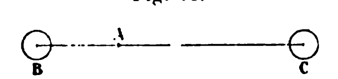
telligatur esse vectis, et in punctis B et C collocentur gravia B et C, sitque

pondus B ad pondus C ut recta CA ad rectam AB :

Aio vectem CB mansurum et æquilibrium in hoc casu constituturum.

Si vero deminuatur tantisper grave B, movebitur vectis in rectum per centrum A ad partes B, donec pondera distantiis a centro sint reciproce proportionalia.

Fig. 10.



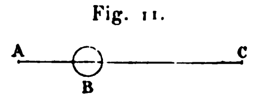
Hæc est *prima propositio* (1) cujus respectu terra ipsa magnus vectis dici potest, ad imitationem Gilberti qui eam magnum magnetem vocat.

4. Hoc posito, mirabilius quiddam proponimus (2), gravia nempe eo facilius tolli a potentia in superficie terræ aut alibi constituta, quò propiora fuerint centro terræ.

Sit centrum terræ A (*fig.* 11), punctum C extra centrum. Jungatur recta CA, in qua sumpto puncto B, collocetur grave in B. Si intelligamus grave B per filum aut axem CB suspensum, detinebitur a potentia, in C collocatâ, cujus proportio sit ad pondus B ut recta AB ad rectam AC.

Indeque facillime deducitur et demonstratur gravia in centro non ponderare; cujus rei demonstrationem hactenus quæsitam jam novimus.

Fig. 11.



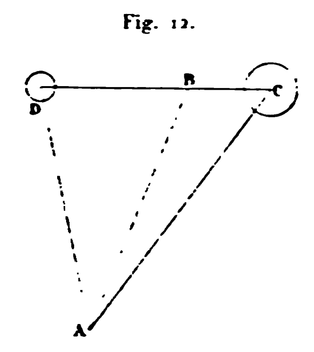
5. Secundum vectium genus Archimedeum dici potest; sed reciproca distantiarum cum ponderibus proportio, quam in vecte simplici demonstravimus, in hoc habere locum non potest, nec ideo subsistere sexta et septima Archimedis propositio (3).

(1) *Comparez* Pièce II, 1.
(2) *Comparez* Pièce II, 2.
(3) *Voir* page 18, note 2.

Ita igitur confidenter pronuntiamus et vectem generaliter sive brachia, sive in directum, sive parallela horizonti, sive etiam angulum constituant, consideramus.

Una quippe demonstratione totum evincimus : Sit vectis extra centrum terræ DBC (*fig.* 12), cujus centrum B, brachia BD et BC, centrum

Fig. 12.



terræ A. Jungantur rectæ DA, BA, CA, et in punctis B et C collocentur gravia sitque proportio gravis C ad grave D composita ex proportione rectæ DA ad rectam CA et reciproce ex angulo CAB ad angulum BAD : Aio vectem BDC, a puncto B suspensum, mansurum et æquilibrium constituturum.

Hanc propositionem, sicut et reliquas, verissimam asseveramus (¹) et, quum libuerit, demonstrationibus ex puriore Geometria et Physica derivatis confirmabimus.

6. Inde patet corruere omnino Veterum de centris gravitatum definitiones : nullum quippe corpus præter sphæram potest reperiri in quo punctum reperiatur a quo grave, extra centrum terræ suspensum, servet eam quam in principio habuerit positionem.

Definietur ergo deinceps centrum gravitatis cujusque corporis, punctum intra corpus positum, quod si cohæreat centro terræ, corpus eam

(¹) On voit que Fermat suppose pour l'équilibre des forces concourantes appliquées à un levier un principe qui diffère essentiellement de celui qui a été depuis universellement adopté.

servabit quam in principio habuerit positionem; eo enim solum casu habent locum centra gravitatis (¹).

7. Demonstrabitur etiam et refelletur error Ubaldi (²) et aliorum, qui existimant libræ brachia, licet non sint parallela horizonti, æquilibrium tamen constitutura.

(¹) Nous reproduisons ici une lettre relative à ce sujet et imprimée page 205 des *Varia* :

« *Lettera del Signor Benedetto Castelli, Abbate di Verona, al Signor di* ****.

» ILL^mo ED ECC^mo SIG^re,

» Ho letti i pensieri sottillissimi del Sig^r di Fermat intorno al centro di gravità, e confesso liberamente che mi sono parsi belli e degni di quello sublime intelletto, che mi fu celebrato con alta lode dal Signor di Beaugrand, quando passò per Roma, e voglio credere che ne habbia assoluta dimostratione; e perchè il Sig^re di Beaugrand mi disse di havere dimostrata una simile propositione, cioè che il medesimo grave, posto in diverse lontananze dal centro della terra, pesava inegualmente, e che il peso al peso era come la distanza alla distanza dal centro della terra, io mi applicai a pensare a questa materia e pretesi allhora di havere ritrovata la dimostratione, ma dopo, essendo mi state promosse alcune difficoltà, mi raffreddai in questa specolatione. Mi ricordo però che ancor io ne deducevo la medesima conseguenza che deduce ancora il Signor di Fermat, cioè che il grave che haverà il suo centro di gravità col centro della terra non haverà peso alcuno; e di più, che la terra tutta non ha peso; e in oltre ne cavai che, descendendo un grave verso il centro della terra, non solo va mutando peso di momento in momento, ma (cosa che puo parere più maravigliosa) il suo centro di gravità si va continuamente movendo nella mole di esso grave; di più, che un grave di qualsivoglia figura, che si mova in se medesimo circolarmente, pure va continuamente mutando il suo centro di gravità; e per tanto facilmente concorro con il Sig^r di Fermat, che il centro di gravità non sia in natura tale quale l'hanno descritto comunemente i Mechanici. E se io credessi che le mie debolezze potessero esser care al Signor di Fermat, gli ne mandarei una copia, non solo per ricevere documenti da S. Sig^ria Ill^ma, ma per fare acquisto di un tale e tanto padrone, al quale prego V. S. I. dedicarmi servitore di singulari devotione, e li bacio le mani. »

(²) GVIDIVBALDI E MARCHIONIBUS MONTIS MECHANICORVM LIBER. — Pisauri. Apud Hieronymum Concordiam, M.D.LXXVII. Cum Licentia Superiorum. — Fermat vise la Proposition III *De librâ* de Guidobaldo del Monte; ce dernier cite, comme ayant soutenu une opinion contraire à la sienne, *Iordanus de ponderibus, Hyeronimus Cardanus de subtilitate, Nicolaus Tartalea de quæsitis et inventionibus*.

VI.

FERMAT A MERSENNE.

< MARDI 15 JUILLET 1636 > (1)

(*Va.* p. 145.)

Mon Révérend Père,

1. Puisque j'ai été assez heureux pour vous ôter l'opinion que vous aviez eue, que j'eusse suivi en ma *Proposition* (2) le même raisonnement que M. de Beaugrand, j'espère qu'avec la même facilité je vous ôterai tous les autres scrupules.

2. Vous avez cru que ma proposition étoit la même que celle de M. de Beaugrand, et ce, par deux raisons : l'une, que je l'avois écrit lorsque je l'envoyai à M. de Carcavi; l'autre, qu'elle semble conclure la même chose.

Pour la première, je vous réponds que, lorsque j'envoyai la dite proposition, je n'avois pas vu encore le livre de M. de Beaugrand et n'avois su si ce n'est qu'il écrivoit du divers poids des graves *secundum varia a terræ centro intervalla*, si bien que là-dessus j'imaginai la proposition que vous avez vue, et crus que peut-être ce seroit la même que celle de M. de Beaugrand, et l'écrivis ainsi à mondit sieur de Carcavi. Mais depuis, ayant vu le Livre de M. de Beaugrand, j'ai trouvé que son opinion est différente de la mienne en ce qu'il suppose que le grave en soi se rend ou plus pesant ou plus léger selon l'éloignement ou l'approche du centre.

3. Et moi je soutiens (en quoi je répondrai à votre seconde raison)

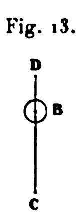
(1) Nous avons réuni à une fin de lettre, datée, des manuscrits A, B, une lettre très courte, non datée, des *Varia*, évidemment écrite sur le vu de la réponse de Mersenne à la Lettre IV.

(2) *Voir* la Pièce II.

qu'en soi il ne change point de poids, mais qu'il est tiré avec plus ou moins de force, ce qui est bien différent du reste.

Soit le centre de la Terre C (*fig.* 13), le grave B au point B et le point D dans la superficie. M. de Beaugrand tient que, si on pèse le

Fig. 13.



grave B dans le point B, on le trouvera plus léger que si on le pèse au point D. Et moi je dis que, si on pèse le grave B dans le point B, on le trouvera de même poids que s'il étoit pesé au point D, et qu'en tout cas, quand bien cela ne seroit pas (car ma proposition ne dépend nullement de la sienne), que le grave B sera soutenu plus aisément par une puissance qui sera au point D que par une autre puissance qui en sera plus proche, et en la proportion que j'ai assignée.

4. Vous ne devez pas douter que ma démonstration ne conclue parfaitement, bien qu'il semble que M. de Roberval ne l'a pas trouvée précise.

Je vous puis donc assurer que toutes les propositions que j'ai mises dans mon écrit (¹) sont parfaitement vraies, et de cela je n'en veux pas être cru que lorsque j'aurai mis par écrit toutes les démonstrations sur cette matière. Je suis si peu ambitieux que, si j'avois trouvé erreur en ce que je vous ai écrit, je ne ferois nulle difficulté de l'avouer.

(A f° 32, B f°ˢ 25ᵛᵒ-26ᵛᵒ.)

5. Pour les lieux plans (²) et la proposition des nombres (³), je vous les envoierai, si M. de Beaugrand ne vous les baille pas.

(¹) C'est-à-dire la Pièce V.
(²) *Voir* Lettre I, **10**.
(³) *Voir* Lettre IV, **3**.

6. Je n'ai pas encore pu examiner les propositions (1) de la trisection de l'angle, ni de l'invention des deux moyennes proportionnelles. Ce sera au plus tôt.

7. A la question numérique (2), je réponds qu'elle reçoit infinies solutions, et même plusieurs manières différentes de la résoudre. Voici la meilleure et la plus aisée que j'ai imaginée :

Soient trouvés deux quarrés desquels la somme soit quarrée, comme 9 et 16; ce que je n'enseigne pas, pour être trop trivial. Soit chacun d'eux multiplié par un même nombre composé de trois quarrés seulement, comme 11. Ces deux produits seront 99 et 176 qui satisferont à la question, car chacun d'eux et leur somme sont composés de trois quarrés seulement (3).

Et ainsi, par la même voie, vous en trouverez infinis, car, au lieu de 9 et 16, vous pouvez prendre tels autres deux quarrés que vous voudrez, desquels la somme soit quarrée, et au lieu de 11, tel autre nombre que vous voudrez composé de trois quarrés seulement.

Si vous prenez, au lieu de 11, un nombre composé de quatre quarrés

(1) On ne retrouve plus trace, dans la Correspondance de Fermat, de ces propositions. On peut croire qu'il s'agit des constructions données par Descartes dans sa *Géométrie* (éd. Hermann, p. 75-76) pour les deux célèbres problèmes de la Géométrie antique. Mersenne, à qui elles avaient été communiquées avant la publication, les aura envoyées à Fermat sans démonstration et sans révéler le nom de leur auteur.

(2) C'est la quatrième des cinq questions numériques proposées par Sainte-Croix (André Jumeau, prieur de) à Descartes en avril 1638 (*voir* Lettres de Descartes, éd. Clerselier, III, 74). Elle était ainsi conçue (pour Descartes) :

« Trouver deux nombres, chacun desquels, comme aussi la somme de leur aggrégat, ne conste que de trois tétragones. J'ai donné 3, 11, 14. J'attends que quelqu'un y satisfasse par d'autres nombres ou qu'il montre que la chose est impossible. »

La première solution donnée par cet énoncé ne paraît avoir été indiquée à Fermat que dans la réponse de Mersenne à la Lettre VI. *Voir* Lettre X, 2.

(3) B ajoute en marge les décompositions suivantes :

					1
1	49	49	9	144	1
1	49	25	9	16	1
9	1	25	81	16	4
11	99	99	99	176	7

seulement, comme 7, chacun des deux produits, ensemble leur somme, seront composés de quatre quarrés seulement.

Que si vous voulez non seulement deux nombres, mais trois ou tel nombre que vous voudrez, desquels un chacun, ensemble la somme de tous, soient composés de trois ou de quatre quarrés seulement, il ne faudra que trouver autant de quarrés que vous voudrez de nombres, desquels la somme soit quarrée, et les multiplier, chacun d'eux *ut supra*.

J'ajouterois la démonstration, mais le temps ne me le permet pas. En tout cas, vous pourrez faire l'essai sur la construction que je vous envoie.

8. Et vous dirai que j'ai trouvé de fort belles propositions sur ce sujet, comme :

Si, de deux plans semblables (1), *l'un est composé de trois quarrés seulement, l'autre le sera aussi;*

et plusieurs autres.

9. Je désirerois que M. de Roberval travaillât aux questions que je vous ai proposées (2).

10. J'ai achevé tout le Traité *De locis planis* (3), où il y a trente ou quarante propositions toutes très belles.

Je suis, mon Révérend Père, votre très affectionné serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 15 juillet 1636.

(1) Nombres qui sont entre eux dans le rapport de deux carrés.
(2) *Voir* la Lettre I, **12**.
(3) *Voir* la Lettre I, **10**.

VII.

FERMAT A ROBERVAL [1].

< AOUT 1636 >

(*Va*, p. 133-134.)

MONSIEUR,

1. Après vous avoir remercié de la faveur que vous m'avez faite et de la peine que vous avez prise, je répondrai en peu de mots aux objections que j'ai trouvées dans votre Lettre, et ce, sans aucun esprit de dispute et pour vous faire seulement approuver la vérité de mes propositions.

2. La première objection [2] consiste en ce que vous ne voulez pas accorder que le mitan d'une ligne qui conjoint deux poids égaux descendant librement, s'aille unir au centre du monde. En quoi certes il me semble que vous faites tort à la lumière naturelle et aux premiers principes : car, puisque ces deux poids sont égaux et qu'ils ont tous deux même inclination pour s'unir au centre du monde, s'ils n'étoient pas empêchés, il est clair qu'ils y approcheront tous deux également. Autrement, ayant supposé les poids égaux et les inclinations au centre égales, vous admettriez néanmoins plus de résistance d'un côté, ce qui seroit absurde.

Et n'importe d'alléguer un levier horizontal, lequel, étant pressé par deux forces égales aux deux bouts horizontalement, demeure néanmoins en l'état qu'il est, quoique l'appui qui est au dessous le divise en parties inégales. Car, au cas de ma proposition, la vérité de mon principe dépend de ce que les deux poids (ou puissances) ont naturellement inclination au centre de la terre et tendent là; et c'est pourquoi,

(1) Première lettre de Fermat à Roberval, répondant à une lettre perdue où ce dernier critiquait les propositions de la Pièce V, qui lui avait été communiquée par Carcavi.

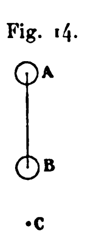
(2) *Voir* Pièce V, 2.

n'ayant point d'avantage l'un sur l'autre, ils s'y approchent tous deux également. Mais en l'espèce du levier horizontal, les deux puissances des extrémités n'ont aucune inclination naturelle à l'appui, mais à s'approcher seulement; et ainsi l'appui ne doit être non plus considéré que s'il n'étoit point.

Outre que jamais personne n'a douté que le centre d'un grave ne s'unît au centre de la terre, s'il n'étoit empêché; or, deux graves, joints par une ligne qui conjoint leurs centres de gravité, ne sont censés constituer qu'un seul grave, duquel le centre de gravité est au mitan de la ligne qui les conjoint : quelle raison donc de croire qu'il s'arrête ailleurs que lorsque son centre sera uni à celui de la terre?

Soient les deux poids égaux A et B (*fig.* 14) joints par la ligne AB,

Fig. 14.



le centre de la terre C. Qu'on laisse choir librement les poids A et B; lorsque le poids B sera au centre C, on ne peut pas dire qu'il s'arrête, parce que le poids A *gravitat super* B *et destruit æquilibrium*. Où commencera donc le levier AB de s'arrêter? Vous ne sauriez trouver le commencement de son repos en un point plutôt qu'en l'autre, si ce n'est au mitan, parce qu'il se trouve pour lors également contrebalancé de tous côtés.

Je ne sais si ces raisons seront capables de vous faire changer d'avis, mais vous me permettrez bien de vous dire que vous trouverez peu de gens qui suivent votre opinion et qui ne m'accordent ce principe : c'est pourquoi je vous conjure de me dire nettement ce qu'il vous en semble.

3. La deuxième objection [1] est contre la nouvelle proportion des

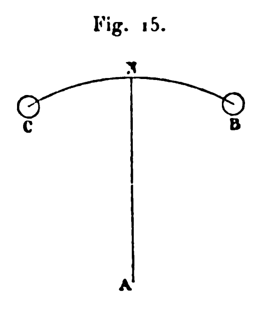
[1] *Voir* Pièce V, 5. — Roberval a, cette fois, raison contre Fermat.

angles que j'ai découverte, contre laquelle pourtant vous n'avez rien dit de précis, mais seulement que vous avez démontré que la proportion réciproque des poids doit être expliquée non pas par les angles, mais par les sinus de ces angles.

Voici la démonstration de ma proposition, de laquelle vous verrez aisément par conséquent celle de toutes celles que vous avez vues dans l'écrit que j'envoyai à M. de Carcavi.

Sit centrum terræ A (fig. 15), *vectis* CNB *portio circuli centro* A *intervallo* AN *descripti,* CN, NB *æquales circumferentiæ, et in punctis* C, B

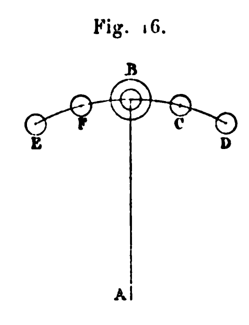
Fig. 15.



æqualia pondera. Supponimus vectem CB *a puncto* N *suspensum manere, idemque accidere si gravia æqualia in quibuslibet punctis brachiorum* CN, NB *collocentur, modo hujusmodi puncta ex utraque parte æqualiter a puncto* N *distent : neque enim destruent æquilibrium pondera æqualia a centro terræ et a centro vectis sive libræ æqualiter distantia.*

Sit centrum terræ A (fig. 16), *vectis sive libra* EFBCD, *ut supra, centrum sive medium libræ punctum* B. *Collocetur pondus* B *in puncto* B *aut,*

Fig. 16.



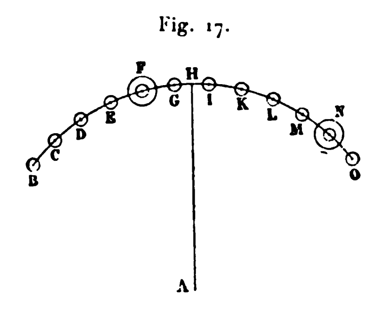
diviso pondere B *in partes æquales* E, F, B, C, D, *collocentur eæ partes in punctis* E, F, B, C, D, *et sint intervalla* EF, FB, BC, CD *æqualia. Supponimus pondus* B, *in puncto* B *collocatum et a puncto* B *suspensum, idem ponderare ac partes* E, F, B, C, D *simul sumptæ, in vecte collocatæ et ab eodem puncto* B *suspensæ.*

Illud nempe accidit quia, propter circulum EFBCD, *partes ponderis* B *eamdem semper servant distantiam a centro terræ ac pondus ipsum integrum* B : *quod non animadvertisse et descensus gravium parallelos supposuisse errorem peperit Archimedeum.*

His suppositis, propositionem nostram demonstramus, et ecce tantùm casum in quo tum vectis centrum, tum extrema æqualiter a centro terræ distant, quia hic casus veritatem prioris vectis geostatici non supponit, de qua videris ambigere.

Sit vectis FHN (fig. 17), *cujus centrum* H, *extrema* F *et* N, *in eadem, quo punctum* H, *a terræ centro distantia. Centro* A, *intervallo* AH, *describatur portio circuli* FHN, *vectis extrema committens, et sit grave in* F *ad grave in* N *in proportione reciproca circumferentiæ* HF *ad circumferentiam* HN : *Aio vectem* FHN *a puncto* H *suspensum mansurum et æquilibrium constituturum.*

Fig. 17.



Hanc autem proportionem eamdem esse quæ angulorum ad centrum A, *patet : ex constructione et duobus axiomatibus præcedentibus facillime theorema concludes.*

4. La hâte du courrier me fait finir là, parce que je ne doute pas que vous ne puissiez voir la conclusion avec un peu de méditation.

Au reste, je vous puis assurer que le Livre ([1]) qu'il vous a plu m'envoyer est ce que j'ai vu de plus ingénieux sur cette matière; mais, si mes propositions sont vraies, de quoi peut-être vous ne douterez pas toujours, vous m'accorderez que ce mouvement sur les plans inclinés se peut prouver encore plus précisément.

Ce n'est pas que je n'estime autant que je dois votre invention; mais ce que le chancelier Bacon a dit est bien vrai : « *Multi pertransibunt et augebitur scientia* ([2]). »

Je suis etc.

VIII.

ÉTIENNE PASCAL ET ROBERVAL A FERMAT.

SAMEDI 16 AOUT 1636 ([3]).

(*Va*, p. 124-130.)

MONSIEUR ([4]),

1. Le principe que vous demandez pour la Géostatique est que, si deux poids égaux sont joints par une ligne droite ferme et [de soi] sans

([1]) Il s'agit évidemment du *Traité de Méchanique. Des poids soustenus par des puissances sur les plans inclinez à l'Horizon. Des puissances qui soustiennent un poids suspendu à deux chordes. Par G. Pers. de Roberval, Professeur Royal ès Mathématiques au Collège de Maistre Gervais et en chaire de Ramus au Collège de France*, inséré, avec une pagination spéciale (de 1 à 36), dans la *Seconde Partie de l'Harmonie universelle* du P. Mersenne (1637).

([2]) Cette pensée, tirée d'un texte du prophète Daniel (XII, 4), se trouve dans le *Novum organum* (I, aphor. 93) sous la forme : *Multi pertransibunt et multiplex erit scientia*, et dans le Traité *De dignitate et augmentis scientiarum* (I, cap. X, 3), sous la suivante : *Plurimi pertransibunt et augebitur scientia*. Mais Fermat a textuellement reproduit la légende d'une vignette au frontispice de la première édition du *Novum Organum* (1620), vignette qui représente un vaisseau franchissant à pleines voiles les Colonnes d'Hercule.

([3]) Réponse à la Lettre VII. Fermat y a répliqué par la Lettre IX, puis à nouveau par la Lettre XI.

([4]) Le texte de cette Lettre a été restitué d'après le manuscrit de la Bibliothèque nationale, latin 7226 f° 40 suiv. Les mots entre crochets [ ] sont des additions empruntées à l'édition des *Varia*. Quant aux autres leçons de cette édition, qui représentent une rédac-

poids et, qu'étant ainsi disposés, ils puissent descendre librement, ils ne reposeront jamais jusques à ce que le milieu de la ligne (qui est le centre de pesanteur des anciens) s'unisse au centre commun des choses pesantes.

2. Ce principe, que nous avons considéré il y a longtemps, ainsi qu'il vous a été mandé, paroît d'abord fort plausible; mais, quand il est question de principe, vous savez quelles conditions lui sont requises pour être reçu : desquelles conditions, cette principale manque au principe dont il s'agit ici, savoir que nous ignorons quelle est la cause radicale qui fait que les corps pesants descendent et d'où vient l'origine de cette pesanteur. Ainsi nous n'avons rien de connu assurément de ce qui arriveroit au centre où les choses pesantes aspirent, ni aux autres lieux hors la surface de la terre, de laquelle, pour ce que nous y habitons, nous avons quelques expériences sur lesquelles nous fondons nos principes.

3. Car il se peut faire que la pesanteur est une qualité qui réside dans le corps même qui tombe; peut-être qu'elle est dans un autre, qui attire celui qui descend, comme dans la terre. Il se peut faire aussi et est fort vraisemblable que c'est une attraction mutuelle ou un desir naturel que les corps ont de s'unir ensemble, comme il est clair au fer et à l'aimant, lesquels sont tels que, si l'aimant est arrêté, le fer, n'étant point empêché, l'ira trouver, [et] si le fer est arrêté, l'aimant ira vers lui et, si tous deux sont libres, ils s'approcheront réciproquement [l'un de l'autre], en sorte toutefois que le plus fort des deux fera le moins de chemin.

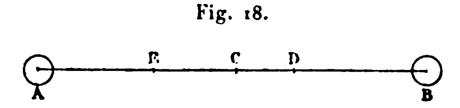
Or, de ces trois causes possibles de la pesanteur [ou des centres des corps], les conséquences seront fort différentes, ce que nous ferons connoître en les examinant ici l'une après l'autre.

tion nouvelle de Roberval faite en vue de l'impression de la Correspondance de Fermat, elles sont reproduites ci-après dans les *Variantes*. Bossut a compris cette Pièce dans son édition des *Œuvres de Blaise Pascal*, 1779; il a suivi en général le texte des *Varia*, à part les changements d'orthographe et quelques modifications de détail.

4. En premier lieu, si la première est vraie, selon l'opinion commune, nous ne voyons point que votre principe puisse subsister : car, sur ce sujet, le sens commun nous dit qu'en quelque lieu que soit un poids [près ou loin du centre de la terre], il pèse toujours également, ayant toujours [en soi] la même qualité qui le fait peser et [en même degré. Le sens commun nous dicte aussi, posée cette même opinion première] qu'alors un corps reposera au centre commun des choses pesantes, quand les parties du corps qui seront de part et d'autre du même centre, seront d'égale pesanteur pour contrepeser l'une à l'autre, sans avoir égard si elles sont peu ou beaucoup [également ou inégalement] éloignées du centre [commun].

Soient donc les deux poids égaux A, B (*fig.* 18), joints ensemble par la ligne [droite] ferme et [de soi] sans poids AB; et soit C le point du

Fig. 18.



milieu de la même ligne AB, et [soient] D, E, des autres points tels quels dans ladite ligne entre les poids A, B. [Vous demandez qu'on vous accorde que les poids A, B, tombant librement avec leur ligne, ne reposeront point jusqu'à ce que le point du milieu C s'unisse au centre commun des choses pesantes.]

Nous accordons que, si le composé des poids A, B est mis de sorte que le point C convienne avec le centre commun des choses pesantes, alors le tout demeurera en équilibre. Mais il nous semble aussi que si le point D ou E convient au même centre commun, en sorte que l'un des poids en soit plus proche, pourvu que l'un soit entièrement d'une part du centre et l'autre de l'autre, ils contrepèseront encore et demeureront en équilibre, comme par le point C, puisque (pour nous servir de vos paroles mêmes) ces deux poids sont égaux et ont tous deux même inclination pour s'unir au [même] centre commun [des choses pesantes], et l'un n'a aucun avantage par dessus l'autre pour le déplacer de son lieu.

Que si être plus proche ou plus éloigné du centre pouvoit être quelque avantage, ce que nous ne croyons pas, supposé que la pesanteur réside au corps même, vous trouverez plus de gens qui croiront que l'avantage est de la part de celui qui est plus proche du centre commun que l'autre : ce qui toutefois est directement contre votre supposition.

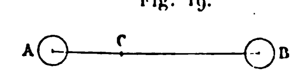
Et ne sert de rien d'alléguer le centre de pesanteur du corps AB, lequel centre, selon les anciens, est au milieu C : car ce centre n'a été démontré que quand la descente des poids se fait par des lignes parallèles, ce qui n'est pas; et, quand il y auroit un tel point, ce qui ne peut être aux corps qui tiennent à un même centre commun, il n'a pas été démontré et ne prouveroit aucunement que ce seroit ce point là par lequel le corps s'uniroit au centre commun. Même cela, pour les raisons précédentes, répugne à notre commune connoissance en plusieurs figures.

En tout cas, nous ne voyons point que ce centre commun des anciens doive être considéré autre part qu'aux poids qui sont pendus ou soutenus hors du lieu auquel ils aspirent.

5. Quant à la comparaison qui vous a été faite du levier horizontal, lequel, étant pressé horizontalement aux deux bouts par deux forces ou puissances égales, demeure en même état qu'il est, elle nous semble entièrement semblable au levier [précédent] AB pressé aux deux bouts par les deux poids égaux A, B, puisque ces poids ne pressent le levier que par la [force ou] puissance qu'ils ont de se porter vers leur centre commun C, D ou E.

Comme si le levier horizontal est AB (*fig.* 19) et les forces ou puis-

Fig. 19.



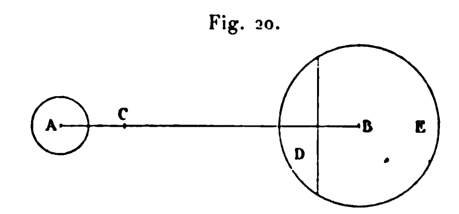
sances égales A [et] B, pressant horizontalement le levier pour le porter à un certain point commun C, auquel elles aspirent et lequel est posé également ou inégalement entre les mêmes puissances dans la ligne AB;

ces forces, pressant également le levier, se résisteront l'une à l'autre, selon notre sens, encore même que l'une, comme A, fût plus près que l'autre du point commun C auquel toutes deux aspirent. Et quand le levier ne seroit point horizontal, mais en telle autre position que l'on voudra, étant considéré [de soi] sans poids et toutes les autres choses comme auparavant, le même effet s'ensuivra selon notre jugement et la comparaison sera entièrement semblable à celle des poids qui sont à l'entour du centre commun des choses pesantes.

6. Nous ajouterons ici ce que nous pensons en ce cas des poids qui seroient inégaux joints comme dessus à une ligne droite ferme et [de soi] sans poids, pour mieux faire paroître notre sentiment.

Soient deux poids inégaux A, B (*fig.* 20), desquels A soit le moindre,

Fig. 20.



et soit AB la ligne ferme qui les joint, dans laquelle le centre de pesanteur des anciens soit le point C, lequel ne sera pas au milieu de la ligne AB. Si donc on pose le composé des poids A, B de sorte que le point C convienne au centre commun des choses pesantes, nous ne pouvons croire qu'il demeurera en cet état, le poids A étant entièrement d'une part du centre [des choses pesantes] et [le poids] B [entièrement] de l'autre part. Mais il nous semble que le plus grand poids B doit s'approcher du même centre [des choses pesantes, jusqu'à ce qu'une partie du dit poids B soit au delà du dit centre] vers A, comme la partie D, en sorte que cette partie D avec [tout le poids] A, étant d'une même part, contrepèsent avec la partie [E] restante de l'autre part.

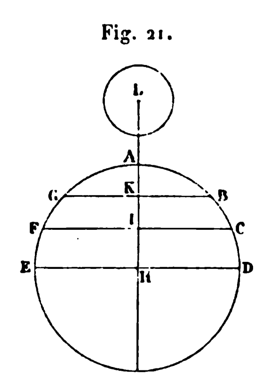
7. Outre ce, nous avons encore une instance en ce cas qui semble conclure que la figure et le volume et encore la disposition des poids

doit être considéré, d'autant qu'un corps pesant semble devoir peser d'autant moins qu'il occupera une plus grande portion de la circonférence ferme passant par le corps et décrite alentour du centre commun des choses pesantes, ce que nous expliquerons plus amplement ci après sur votre second principe du levier. Or vous savez qu'un même corps, sous différentes figures, positions ou volumes, peut occuper plus ou moins de cette circonférence et, s'il y a cause pour laquelle un même corps doive moins peser proche du centre qu'étant plus éloigné, celle-ci en est peut-être une, étant clair que, quoiqu'il fût toujours de même figure, position et volume, néanmoins, étant plus proche du centre, il occupera une plus grande portion de la circonférence susdite qu'étant plus éloigné. Mais, quand cela seroit, nous croyons qu'à peine seroit-il possible à l'esprit humain d'assigner les proportions de cette augmentation ou diminution selon les différents éloignements du centre.

8. Si la seconde ou la troisième cause possible de la pesanteur des corps est vraie, il nous semble que l'on en peut tirer des [mêmes] conclusions.

Soit le corps attirant ABCD (*fig.* 21) [sphérique], duquel le centre

Fig. 21.



soit H, et que la vertu d'attraction soit également épandue par toutes les parties du corps attirant, et soit le corps attiré L, considéré premièrement hors le corps attirant en A.

Soit menée la ligne droite AH, à laquelle soit un plan perpendicu-

laire EHD, coupant le corps ABCD en deux parties [égales et partant] d'égale vertu. Soient aussi, dans la ligne AH, marqués tant de points que l'on voudra, comme K, I, par lesquels soient menés des plans [FIC, GKB] parallèles au plan EHD, coupant le corps [attirant] ABCD en parties inégales, et partant d'inégale vertu.

[Alors] le corps [L] étant en A sera attiré vers H par la puissance de tout le corps ABCD et, le chemin étant libre, il viendra en K, là où il sera attiré vers H par la plus [grande et] forte partie BDEG [et contre-tiré vers A par la plus petite et plus foible partie BAG]; il en sera de même quand il sera venu en I, où il sera moins attiré que quand il était en K ou en A; toutefois il sera contraint de s'approcher toujours du centre H, tant qu'il y soit venu, et, la partie qui attire diminuant toujours et celle qui retire s'augmentant [toujours], il sera continuellement attiré avec moins de force jusques à ce qu'étant arrivé en H, il sera également attiré de toutes parts et demeurera en cet état.

Si cette position est vraie, il est facile de voir que le corps L pèsera d'autant moins qu'il sera [plus] proche du centre H; mais son poids ne diminuera pas en la proportion des lignes HI, HK, HA, ce que vous connoîtrez assez en le considérant, sans que nous vous l'expliquions davantage.

9. Puis donc que de ces trois causes possibles de la pesanteur, nous ne savons quelle est la vraie, et que même nous ne sommes pas assurés que ce soit l'une d'icelles, se pouvant faire [que la vraie cause soit composée des deux autres ou] que ce [en] soit une [tout] autre, de laquelle on tireroit des conclusions toutes différentes, il nous semble que nous ne pouvons pas poser d'autres principes [pour raisonner] en cette matière que ceux desquels nous sommes assurés par une expérience continuelle assistée d'un bon jugement.

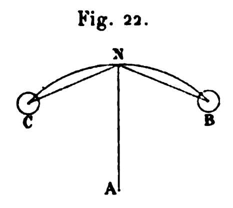
Quant à nous, nous appelons des corps également ou inégalement pesants, ceux qui ont une égale ou inégale puissance de se porter vers le centre commun [des choses pesantes], et un même corps est dit avoir un même poids, quand il a toujours cette même puissance : que

si cette puissance augmente ou diminue, alors, quoique ce soit le même corps, nous ne le considérons plus comme le même poids. Or, que cela arrive aux corps qui s'éloignent ou s'approchent du centre [commun des choses pesantes], c'est ce que nous désirerions bien de savoir; mais, ne trouvant rien qui nous contente sur ce sujet, nous laissons cette question indécise et nous raisonnons seulement sur ce que les Anciens et nous en avons pu découvrir de vrai jusques à maintenant. [Voilà ce que nous avons à vous dire pour le présent touchant votre principe de la Géostatique, laissant à part beaucoup d'autres doutes pour éviter prolixité de discours.]

10. Pour la nouvelle proportion des angles que vous mettez en avant, afin de la démontrer, vous supposez deux principes, desquels le premier est vrai et l'autre si éloigné d'être vrai, qu'il y a des cas où il arrive tout le contraire de ce que vous demandez [qu'on vous accorde pour vrai].

Le premier est tel : soit A (*fig.* 22) le centre commun des choses pesantes, l'appui du levier N, et du centre A, intervalle AN, soit décrite

Fig. 22.



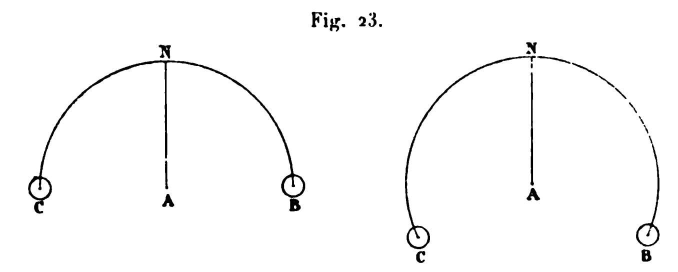
une portion de circonférence telle quelle CNB, pourvu que l'arc CN soit égal à l'arc NB; et soit considéré cet arc CN [B] comme une balance ou un levier [de soi] sans poids, qui se mène librement à l'entour de l'appui N; soient aussi des poids égaux posés en C [et] B.

Vous supposez que ces poids contrepèseront l'un à l'autre et feront équilibre, étant balancés sur le point N; et [il] semble que tacitement vous supposez encore l'équilibre, quand les bras du levier NC et NB seront des lignes droites, pourvu que les points C [et] B soient également éloignés du centre A, et les lignes NC et NB soustendantes ou cordes, en effet ou en puissance, d'arcs égaux NC, NB.

Toutes ces choses sont vraies en général, mais nous ne les croyons telles que pour ce que nous les avons démontrées en conséquence d'autres principes qui nous sont plus familiers, plus clairs et plus connus.

Toutefois, en particulier, il y a une distinction qui doit être bien considérée et est telle : Quand les arcs NC et NB sont chacun moindres qu'un quart de circonférence, le levier [CNB chargé des poids C et B] pèse sur l'appui N, poussant vers le centre A pour s'en approcher; quand les arcs CN, NB (*fig.* 23) sont chacun d'un quart de circonfé-

Fig. 23.



rence, le levier CNB chargé des poids C, B ne pèse nullement sur l'appui N, d'autant que les poids sont diamétralement opposés, et partant le levier demeurera de même sans appui [qu'avec un appui]; enfin, quand les arcs égaux NC, NB sont chacun plus grands qu'un quart de circonférence, le levier CNB, chargé des poids égaux C, B, pèse sur l'appui N poussant vers N pour s'éloigner du centre A.

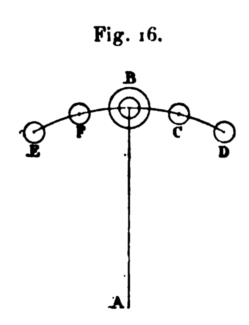
11. Si ces particularités sont bonnes, il s'ensuit que votre second principe ne peut subsister, ce qui paroitra fort clair quand nous l'aurons examiné plus particulièrement, comme il s'ensuit :

Soit donc A (*fig.* 16) le centre commun des choses pesantes, la balance ou le levier EFBCD, dont l'appui est B. Soit posé un poids comme B, tout entier au point B, pesant de toute sa force sur l'appui B; ou bien soit divisé le poids B en parties égales E, F, B, C, D, lesquelles soient posées sur le levier aux points E, F, B, C, D, étant les arcs EF, FB, BC, CD égaux et tout l'arc EFBCD décrit alentour du centre A.

Vous supposez que le poids [B], posé tout entier au point B, pèsera

de même sur l'appui B qu'étant posé par parties [égales] aux points E, F, B, C, D. Cela est tellement éloigné du vrai que quelquefois [le poids B, ainsi posé par parties sur le levier, ne pèsera plus du tout sur l'appui B; quelquefois], en lieu de peser sur l'appui B [pour tirer le levier] vers A, il pèsera [tout] au contraire sur le même appui [B] pour s'éloigner de A; et toutefois, étant ramassé tout entier au point B

Fig. 16.

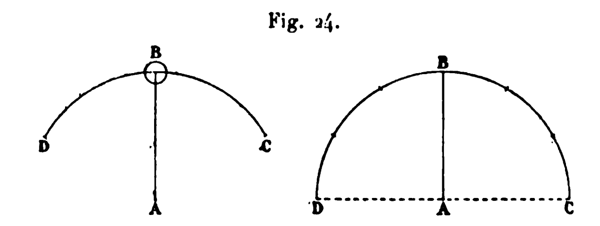


il pèsera toujours de toute sa force sur l'appui B pour emporter le levier vers A et, en général, étant [divisé et] étendu, il pèsera toujours moins sur l'appui qu'étant ramassé au point B [et vous supposez qu'entier et divisé, il pèse toujours de même].

Toutes ces choses, quoique contraires à votre supposition, sont démontrées en suite de nos principes, et nous vous en pouvons expliquer les principaux cas par vos principes mêmes.

12. Soit derechef A (*fig.* 24) le centre commun des choses pesantes,

Fig. 24.



alentour duquel soit décrit le levier CBD qui soit, de soi, sans poids et prolongé tant que de besoin : et soit B le point de l'appui, auquel si un poids est posé, nous demeurerons d'accord avec vous qu'il pèsera

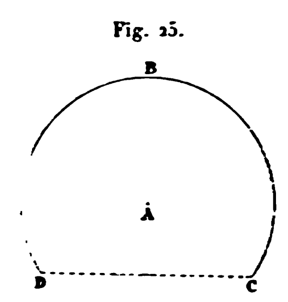
de toute sa force sur l'appui B, lequel appui, s'il n'est assez fort, rompra et le poids s'en ira avec son levier jusques au centre A.

13. Maintenant, soit divisé le poids, premièrement en deux parties égales et, ayant pris les arcs BC et CD, chacun d'un quart de circonférence, afin que tout l'arc CBD soit une demie circonférence, soit posée une moitié du poids en D, l'autre en C. Lors ces deux poids C [et] D, pesant vers A, ne feront point d'autre effet sur le levier CBD, sinon qu'ils le presseront également par les [deux] bouts C [et] D pour le courber. Supposant donc qu'il est assez roide pour ne pas plier, ils demeureront [sur le levier] de même que s'ils étoient attachés aux bouts du diamètre DAC, sans qu'il soit besoin de l'appui B, sur lequel le levier, chargé de ses deux poids, ne fait aucun effort : quand cet appui n'y sera pas, le tout demeurera de même que quand il y sera, ce qui est assez clair.

Que si le poids est divisé en plus de deux parties égales et, qu'etant étendu sur des portions égales du levier, deux d'icelles parties se rencontrent aux points C, D, [et] les autres dans l'espace CBD, celles qui seront en C [et] D, ne chargeront point l'appui B; quant aux autres, elles le chargeront, mais d'autant moins que plus elles approcheront des points C, D, auxquels finit la charge. Ainsi, il s'en faudra beaucoup que toutes ensemble étendues chargent autant l'appui que si elles étoient amassées en B; [elles ne pèsent donc pas de même].

14. Davantage, soient pris les arcs égaux BC [et] BD (*fig.* 25), plus

Fig. 25.

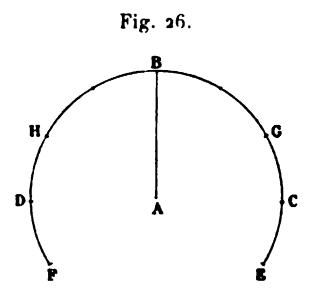


grands chacun qu'un quart de circonférence, et soit imaginée la ligne

droite DC. Puis, étant divisé le poids en deux parties égales seulement, soit attachée l'une en C, [et] l'autre en D. [Alors] il est clair que le levier, chargé des poids C, D, pèsera sur l'appui B; mais ce sera tout au contraire que si les deux poids étoient amassés en B. Car, si l'appui n'est pas assez fort, il rompra, et les poids, emportant leur levier, que nous supposons être de soi sans poids, ne cesseront de mouvoir tant que la ligne droite CD soit venue au point A, le levier étant monté en partie au-dessus de B, au lieu de s'abaisser vers A, ce qui seroit arrivé si les poids, étant amassés en B, avoient rompu l'appui. [Voyez quelle différence!]

15. Enfin, soit le levier comme auparavant (*fig.* 26), auquel soient les quarts de circonférence BC, BD et, de part et d'autre du point C,

Fig. 26.



soient pris des arcs égaux CG, CE, chacun moindre qu'un quart. De même, de part et d'autre du point D, soient pris les arcs égaux, entre eux et aux précédents, DH, DF, tous commensurables au quart. Soit aussi divisé tout l'arc EBF en tant de parties égales qu'on voudra, en sorte que les points E, C, G, B, H, D, F soient du nombre de ceux qui font la division; et soit divisé le poids en autant de parties égales que l'arc EBF, lesquelles parties de poids soient posées aux points de la division du levier.

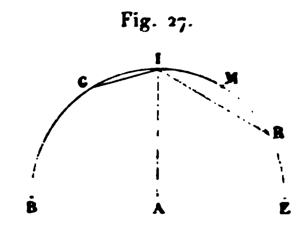
Alors, les poids qui se trouveront posés sur les arcs EC et FD, déchargeront autant l'appui B qu'il étoit chargé par ceux des arcs CG, DH. Ainsi, considérant tous ceux qui sont sur les arcs EG et FH, ils ne chargent point l'appui [B], lequel, par ce moyen, ne sera chargé que

par ceux qui seront sur les arcs GB, BH; et, si entre BG et BH il n'y a aucun poids (ce qui arrivera quand ces arcs BG et BH ne feront chacun qu'une partie de la [susdite] division [du levier]), alors l'appui [B] sera entièrement déchargé.

Voyez donc combien il y aura de différence entre les poids amassés en B et étendus [par parties] sur le levier EBF. Voyez aussi qu'un même poids [divisé par parties et étendu sur le levier] pèse d'autant moins sur l'appui B que plus [grande est la portion qu'] il occupe de la même circonférence décrite alentour du point A [centre commun des choses pesantes].

16. Maintenant, pour venir à votre démonstration, soit le levier GIR (*fig.* 27), [duquel] l'appui soit I et que les extrémités G, R et l'appui I

Fig. 27.



soient également éloignés du centre commun [des choses pesantes] A, alentour duquel soit imaginée la portion de circonférence GIR, et soit fait que

comme l'arc GI à l'arc IR, ainsi le poids R soit au poids G.

Vous dites que le levier chargé des poids G, R demeurera en équilibre sur son appui I: quant à la démonstration, vous supposez qu'elle est assez facile en conséquence des deux principes précédents et, de fait, si les principes étoient vrais, il ne resteroit peut-être pas beaucoup de difficulté et la chose se pourroit à peu près conclure ainsi, la conclusion étant faite selon la méthode d'Archimède, en sorte que les arcs RE, RM soient égaux, tant entre eux qu'à l'arc IG, et les arcs GB, GM égaux, tant entre eux qu'à l'arc IR.

[Et] soit étendu le poids R également depuis E jusques en M et le

poids G aussi également depuis M jusques en B; ainsi les deux poids G, R seront également étendus sur tout l'arc BGIMRE, duquel arc les portions IB, IE étant égales, le levier BGIMRE demeurera en équilibre sur l'appui I par le premier principe.

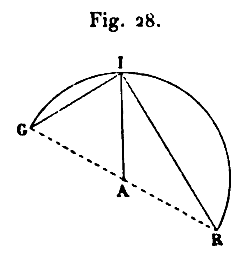
Mais le poids G, étendu depuis B jusques en M, pèse de même qu'étant ramassé au point G, par le second principe, et, par le même principe, le poids R pèse de même, étant étendu depuis M jusques en E, qu'étant ramassé au point R. Car tous ces poids, étant ramassés en G et en R, pèseront de même sur le levier qu'étant étendus; puis donc qu'étant étendus, ils faisoient équilibre sur le même levier, ils feront encore équilibre, étant ramassés en G et en R.

En cette démonstration, tout ce qui est fondé sur le second principe feroit les mêmes difficultés que le principe même et, partant, la conclusion ne s'ensuit pas que les poids G, R fassent équilibre sur le levier GIR.

Nous pouvions nous contenter de ce que dessus, croyant que vous serez satisfait; mais nous vous prions de considérer encore deux instances qui sont telles :

17. La première, qu'au levier GIR (*fig.* 28), l'angle GIR étant droit et [partant] l'arc GIR une demie circonférence [décrite autour de A

Fig. 28.

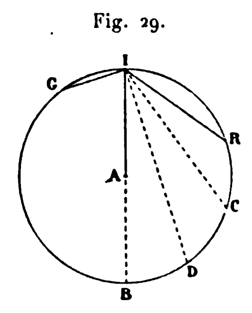


centre commun des choses pesantes], si [l'] on pose l'arc GI moindre que l'arc IR, par exemple que GI soit le tiers de IR et le poids R de 20 livres, il faudroit donc en G 60 livres, selon vous, pour faire équilibre sur le levier GIR appuyé au point I. Et toutefois, si vous mettez des poids égaux en G et en R, ils seront diamétralement opposés et

[partant par le principe de la Géostatique, au cas du dit principe accordé par vous et par nous, les dits poids égaux] feront encore équilibre comme s'ils pesoient sur les extrémités du diamètre GR vers le centre A; et, quand il y a une fois équilibre, pour peu que l'on augmente ou diminue l'un des poids, l'équilibre se perd. Voyez comme cela se peut accorder avec votre position.

18. La seconde instance est telle : soit le centre [commun des choses pesantes] A (*fig.* 29), alentour duquel soit la circonférence GIR, l'appui

Fig. 29.



du levier I, et les bras IG, IR, desquels GI soit le moindre; et soit prolongée la ligne droite IA tant qu'elle rencontre la circonférence en B. Partant, selon vous, il faudra en G un plus grand poids qu'en R et, si l'on prend l'arc IC plus grand que IR, faisant le bras du levier IC et même poids en C qui étoit en R, il faudra en G un plus grand poids qu'auparavant [pour faire l'équilibre]. De même, prenant l'arc ID encore plus grand que IC et faisant le bras du levier ID et le poids D de même que le poids C, il faudra encore augmenter le poids G. Ainsi, plus le bras du levier qui est en la circonférence IRB aboutira près du point B, étant chargé du même poids, plus il faudra à IG un grand poids pour contrepeser, et, selon le sens commun, raisonnant à l'ordinaire, le bras du levier étant [la ligne droite] IB [chargé comme dessus], il faudroit en G le plus grand poids. Et toutefois, alors le poids qui seroit en B, pesant vers A, feroit tout son effort sur la roideur du bras BI; et le moindre poids qui seroit en G feroit balancer le bras IB vers D; et pour peu que le poids qui sera sur le bras IG fait balancer le

bras IB avec son poids vers D (ce qui semble ne se pouvoir nier), alors, encore que tant G que B sortent de la circonférence, on conclura une absurdité manifeste contre votre position.

19. Enfin, Monsieur, pour ce que l'expérience de tout ce que dessus ne se peut faire des poids naturels, si vous voulez prendre la peine de la faire avec des artificiels, supposant [pour levier] un petit cercle artificiel, au lieu du grand cercle naturel, et des puissances qui agissent [ou aspirent] vers le centre du petit cercle, au lieu des poids qui agiroient vers le centre du grand, vous trouverez que l'expérience est du tout contraire à votre raisonnement.

Si nous eussions eu du temps davantage, nous vous aurions envoyé ce que nous avons établi sur ce sujet et les démonstrations, mais ce sera au premier ordinaire.

20. Si vous avez agréables les communications sur le sujet de la Géométrie, en laquelle nous savons que vous excellez entre tous ceux du temps, nous vous ferons voir de notre part des choses que peut-être vous ne mépriserez pas. Or ce que nous vous proposerons ne sera point par forme de questions, mais nous vous envoierons les démonstrations en même temps pour en avoir votre jugement.

[Vous nous obligerez aussi de nous faire de vos pensées. Nous sommes, etc.]

IX.

FERMAT A ÉTIENNE PASCAL ET ROBERVAL.

SAMEDI 23 AOUT 1636 (¹).

(*Va*, p. 130-132.)

MESSIEURS,

1. J'ai lu avec grand soin le jugement qu'il vous a plu me donner des propositions que j'avois envoyées à M. de Carcavi et, comme j'ai

(¹) Première réplique à la Lettre VIII; *voir* particulièrement **10** et **11**.

reconnu la fermeté de votre raisonnement jointe avec une grande et profonde connoissance de cette matière, j'ai aussi cru que vous ne trouveriez pas mauvaise ma réplique que je ferai en peu de mots, et que peut-être je tirerai à ce coup de vous le consentement que vous n'avez pas voulu m'accorder d'abord. Et je ne pense pas avoir besoin de m'excuser des erreurs qu'il vous a semblé que j'avois commises, à quoi, quand je ne répondrois que par la hâte que j'eus d'écrire à M. de Roberval (1), lequel j'avois prié de suppléer ce qui ne seroit pas expliqué assez au long, j'aurois peut-être suffisamment satisfait.

2. Mais pourtant je vous déclare que je n'ai jamais cru parler que du levier moindre que le demi-cercle et, si j'ai omis de l'écrire, ma figure, qui n'en représentoit que celui-là, réparoit assez ce manquement, puisque je n'avois pas seulement eu le temps d'écrire la démonstration de ma proposition sur ma dite figure. Que si le levier est plus grand que le demi-cercle, j'ajouterai à la fin de ce discours la proportion qu'il doit garder; il me semble que j'en ai assez dit pour répondre à la plus forte des objections que vous faites contre mon second levier.

3. L'autre qui combat mon second principe a été prévue par moi, et je vous avouerai que, quoique ce second principe soit manifestement faux et qu'il choque mon sentiment sur le fait du premier levier, je l'avois pourtant industrieusement et à dessein mis dans ma Lettre, afin de vous faire accorder qu'un grave pèse moins, plus il approche du centre de la Terre, ou, en me niant cette vérité, vous obliger d'accorder celle de mon second levier. M. de Carcavi, à qui je l'avois écrit quelque temps auparavant que de recevoir vos Lettres, vous le témoignera sans doute, et j'en ai tiré du moins le profit que vous m'avez accordé qu'un grave pèse moins, plus il approche du centre, quoiqu'il soit malaisé de déterminer la proportion de la différence de ces poids.

4. Je me contente d'avoir dit ce peu de mots par avance et viens à la démonstration de mon second levier, après vous avoir assuré que

(1) *Voir* Lettre VII.

jamais homme du monde ne se portera avec plus de bonne foi et d'ingénuité que moi à avouer les vérités que j'aurai reconnues, et que je crois ma proposition tellement vraie que, l'ayant souvent considérée de divers biais et à diverses reprises, je n'ai jamais pu en douter.

Voici les vrais principes de ma démonstration :

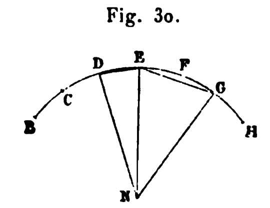
Axioma I. — *Si grave quiescens ab aliquo puncto suspendatur, gravitabit super lineam rectam punctum suspensionis et centrum terræ conjungentem.* — *Patet axiomatis veritas quia aliter grave non quiesceret.*

Axioma II. — *In vecte circulari, cujus dimidium punctum suspensionis, si ex utraque parte in punctis æqualium sectionum gravia æqualia collocentur, corpus ex omnibus illis gravibus compositum et a medio illo puncto suspensum quiescet.*

Axioma III. — *In vecte circulari semicirculo minori, cujus centrum est centrum terræ (hoc enim in nostro vecte semper intelligendum), si punctum suspensionis inæqualiter vectem dividat et ex utraque parte in punctis æqualium sectionum gravia æqualia collocentur, non manebit corpus ex omnibus illis gravibus compositum, sed inclinabitur vectis ex parte majoris portionis.* — *Hoc patet etiam ex vestris positionibus : quum enim totus vectis sit semicirculo minor, sinus minoris portionis erit minor sinu majoris portionis, ideoque non negabitis inclinationem fieri ex parte majoris portionis.*

His suppositis, exponatur figura continens vectem DEG (fig. 30) *et per-*

Fig. 30.

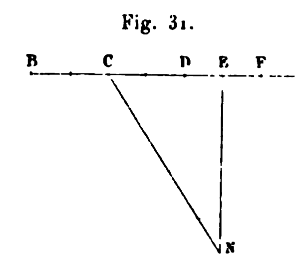


ficiantur reliqua juxta præparationem Archimedeam. Grave in D, *dispositum per partes æquales in portiones* BC, CD, DE, EF, *gravitat super rectam* DN : *nam, suspensum a puncto* D, *per secundum axioma quiescit ; ergo, per primum, gravitat super* DN. *Igitur, sive totum sit in* D, *sive dis-*

positum per partes æquales in portiones BC, CD, DE, EF, *semper super eamdem rectam* DN *gravitat. Similiter grave in* G, *sive totum sit in* G, *sive per partes æquales* FG, GH *disponatur, semper super eamdem rectam* GN *gravitabit. Quum autem gravia per partes æquales* BC, CD, DE, EF, FG, GH *disposita sint æqualia, gravitabit aggregatum totius gravis super rectam* EN : *ergo patet conclusio aut, per deductionem ad absurdum, inde facillime derivatur ope tertii axiomatis.*

Eadem certe erat Archimedis (¹) *ratiocinatio : nam rectæ* BD (fig. 31) *centrum gravitatis, verbi gratia, in* C *constituit, ut probet gravia æqualia*

Fig. 31.



in punctis B, D *super rectam* CN *gravitare, quod ille supponit, quum in libra tantum* DEF *hoc verum sit, quæ ad rectam* EN *est perpendicularis, in reliquis falsum, quia ad angulos inæquales a rectis à centro terræ secantur. In nostro autem vecte hæc difficultas non occurrit, quum semper et in quocumque puncto rectæ a centro terræ eum normaliter secent.*

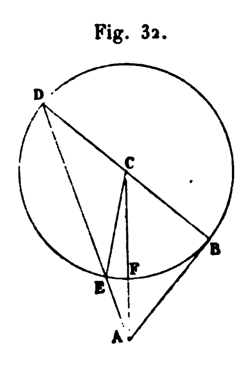
Sit libra DCB (fig. 32), *centrum terræ* A, *centrum libræ* C; *compleatur circulus centro* C, *intervallo* CB *descriptus et* DEA, BA, CFA *jungantur. Jungatur et* CE; *ponantur in punctis* B *et* D *pondera æqualia et sit angulus* ACD *major angulo* ACB : *Aio libram a puncto* C *suspensam ad partes* B *inclinari, idque per supposita ab Archimede.*

Pondus a puncto D *ad punctum* E *transferatur; ex Archimede, idem est ac si pondus esset in puncto* D, *quia ponitur in recta punctum* D *et centrum terræ conjungente : si igitur intelligatur recta* CE *pondus in* E *retinere, manebunt, ex Archimede, brachia* CE *et* CB, *quum ponantur manere* CB *et* CD. *Igitur anguli* ECF, FCB *erunt æquales : triangulum enim æqui-*

(¹) Cp. Archimède, *De planorum æquilibriis*, I, 6.

crure, in cujus extremis æqualia pondera collocantur, movetur semper donec perpendicularis horizonti, hoc est recta verticem et centrum terræ conjungens, angulum ad verticem bisecet, quod experientia testatur. Angulus autem ECB *duplus est anguli ad* D : *ergo angulus* FCB *angulo* D

Fig. 32.

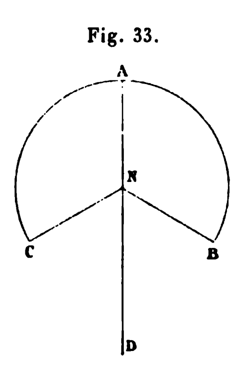


est æqualis. Parallelæ igitur erunt CA *et* DA, *quod est absurdum : non ergo quiescit libra, sed ad partes* B *inclinatur, quia angulus* BCF *major est angulo* ECF, *ut patet.*

Voilà, en peu de mots, ma réplique pour le second levier, laquelle j'eusse plus étendue si le temps me le permettoit.

5. Que si le levier est plus grand que le demi-cercle comme CAB (*fig.* 33) duquel le point de suspension est A, les extrémités C, B,

Fig. 33.

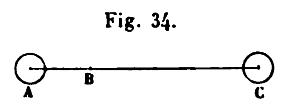


alors le levier ne soutiendra plus, mais sera pressé en haut par ces deux poids, de sorte qu'il faut prendre la proportion réciproque des

deux angles CND, DNB, après avoir prolongé la ligne AN. La démonstration en est aussi aisée que celle du premier cas.

6. Pour le premier levier, soit le centre de la terre B (fig. 34), les poids égaux A et C, et la ligne BC plus grande que BA. Si vous m'accordez que ce poids en C pèse plus qu'en A (quoique vous estimiez

Fig. 34.



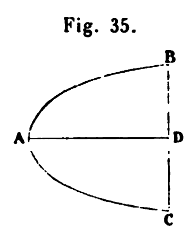
qu'il soit malaisé d'en déterminer la proportion), mes affaires sont faites : car il descendra donc, et la même raison ayant toujours lieu jusques à ce que la ligne CB soit égale à BA, il ne s'arrêtera pas plus tôt.

Et que cela se fasse par attraction ou autrement, la chose est indifférente. Toutefois je vous puis assurer que je puis prouver cette même proposition par des expériences que vous ne sauriez contester et que je vous envoierai au long, dès que la commodité me le permettra.

7. Cependant voici une de mes propositions géométriques, puisqu'il semble que vous ayez désiré d'en voir :

Sit parabole AB (fig. 35), *cujus vertex* A, *et circa rectam* DA *stabilem figura* DAB *circumvertatur, describetur conoides parabolicum Archime-*

Fig. 35.



deum, cujus proportio ad conum ejusdem basis et verticis erit sesquialtera. Quod si circa stabilem DB *figura* DAB *circumvertatur, fiet novum conoides cujus proportio ad conum ejusdem basis et verticis quærebatur.*

Eam nos esse ut 8 *ad* 5 *demonstravimus, nec res vacabat difficultate. Imo et centrum gravitatis ejusdem conoidis invenimus.*

8. J'ai trouvé beaucoup d'autres propositions géométriques, comme la restitution de toutes les propositions *de locis planis* (1) et autres; mais ce que j'estime plus que tout le reste est une méthode pour déterminer toutes sortes de problèmes plans ou solides, par le moyen de laquelle je trouve l'invention (2) *maximæ et minimæ in omnibus omnino problematibus*, et ce, par une équation aussi simple et aisée que celles de l'Analyse ordinaire.

9. Il y a infinies questions que je n'aurois jamais pu résoudre sans cela, comme les deux suivantes, que vous pouvez essayer si vous voulez (3) :

Datæ sphæræ inscribere conum omnium inscribendorum ambitu maximum.

Datæ sphæræ inscribere cylindrum omnium inscribendorum ambitu maximum.

J'entends par *ambitum*, non seulement *superficies conicas et cylindricas*, mais le circuit entier composé, au cône, du cercle de la base et de la superficie conique, et au cylindre, des deux cercles des bases et de la superficie cylindrique.

Il semble que ces deux questions sont nécessaires pour une plus grande connoissance des figures isopérimètres (4).

10. Cette méthode ne sert pas seulement à ces questions, mais à beaucoup d'autres et pour les nombres et pour les quantités.

Vous m'obligerez infiniment de me faire part des productions de votre esprit et de me croire etc.

(1) *Voir* Lettres I, 10 et VI, 10.
(2) *Voir* Tome I, p. 133.
(3) *Voir* Lettres I, 12, et VI, 9.
(4) Sujet dont s'occupait Roberval. *Voir* Lettre XIV, 11.

X.

FERMAT A MERSENNE.

MARDI 2 SEPTEMBRE 1636.

(*Va.* p. 123-124.)

Mon Révérend Père,

1. La lettre dont vous me parlez dans votre dernière s'est sans doute égarée, car celle que je viens de recevoir est la seule qui m'est venue depuis cinq ou six semaines de votre part.

2. Sur le sujet de laquelle [1] je vous dirai que, quand nous parlons d'un nombre composé de trois quarrés seulement, nous entendons un nombre qui n'est ni quarré, ni composé de deux quarrés; et c'est ainsi que Diophante et tous ses interprètes l'entendent, lorsqu'ils disent qu'un nombre, composé de trois quarrés seulement en nombres entiers, ne peut jamais être divisé en deux quarrés, non pas même en fractions. Autrement et au sens que vous semblez donner à votre proposition, il n'y auroit que le seul nombre de 3 qui fût composé de trois quarrés seulement en nombres entiers; car :

Premièrement, tout nombre est composé d'autant de quarrés entiers qu'il a d'unités;

Secondement, vos nombres de 11 et 14 se trouvent composés chacun de cinq quarrés; le premier de 4, 4, 1, 1, 1; le second de 4, 4, 4, 1, 1.

Que si vous entendez que le nombre que vous demandez soit composé de trois quarrés seulement et non pas de quatre, en ce cas la question tient plus du hasard que d'une conduite assurée et, si vous m'en envoyez la construction, peut-être vous le ferai-je avouer.

(1) *Voir* Lettre VI, 7. — D'après Descartes (Lettres, éd. Clerselier, III, 66), l'auteur de la question, Sainte-Croix, demandait que les deux nombres à trouver et leur somme fussent composés de trois carrés à l'exclusion de quatre. Il n'y aurait dès lors, suivant Descartes, que trois solutions : 3, 3, 6; 3, 11, 14; 3, 21, 24.

De sorte que j'avois satisfait à votre proposition au sens de Diophante, qui semble être le seul admissible en cette sorte de questions.

Or, qu'un nombre, composé de trois quarrés seulement en nombres entiers, ne puisse jamais être divisé en deux quarrés, non pas même en fractions, personne ne l'a jamais encore démontré et c'est à quoi je travaille et crois que j'en viendrai à bout. Cette connoissance est de grandissime usage et il semble que nous n'avons pas assez de principes pour en venir à bout; M. de Beaugrand est en cela de mon avis. Si je puis étendre en ce point les bornes de l'Arithmétique, vous ne sauriez croire les propositions merveilleuses que nous en tirerons.

3. Pour la *Proposition géostatique*, elle est toute fondée sur ce principe seul, que deux graves égaux, joints par une ligne ferme et laissés en liberté, se joindront au centre de la terre par le point qui divise également la ligne qui les unit, c'est-à-dire que ce point de division s'unira au centre de la terre. Messieurs Pascal et de Roberval [1], après avoir reconnu que tout mon raisonnement est fondé là-dessus et, qu'accordant ce principe, ma proposition est sans difficulté, m'ont nié ce principe, que je prenois pour un axiome, le plus clair et le plus évident qu'on peut demander; obligez-moi de me dire si vous êtes de leur sentiment. Je l'ai pourtant démontré depuis peu par de nouveaux principes, tirés des expériences, qu'on ne me sauroit contester, et je le leur envoierai au plus tôt.

Je suis etc.

(1) *Voir* Lettre VIII, 1 et suiv.

XI.

FERMAT A ROBERVAL [1].

MARDI 16 SEPTEMBRE 1636.

(*Va*, p. 134-136.)

Monsieur,

1. Je me trouvai ces jours passés à la campagne lorsque je répondis à votre écrit, que j'avois pourtant laissé en cette ville. Depuis mon retour, je l'ai considéré plus exactement et vous envoie la réponse plus précise à tous ses points concernant le premier levier. Si vous ne goûtez pas mes raisons sur le second, vous m'obligerez beaucoup de m'envoyer la démonstration de votre proposition suivant l'opinion où vous êtes, que les graves gardent la proportion réciproque des perpendiculaires tirées du centre du levier sur les pendants, et de laquelle je douterai toujours jusques à ce que je l'aurai vue. Je vous puis pourtant assurer que je ne saurois démordre encore de la mienne et qu'il me semble que vous ne sauriez démontrer la vôtre, au moins par les principes que nous connoissons.

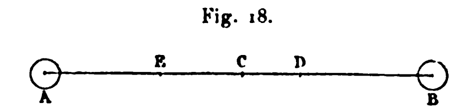
2. Le principe que je vous ai demandé pour l'établissement de mes propositions géostatiques est que, si deux poids égaux sont joints par une ligne droite ferme et de soi sans poids et, qu'étant ainsi disposés, ils puissent descendre librement, ils ne reposeront jamais jusques à ce que le milieu de la ligne s'unisse au centre commun des choses pesantes. Ce principe, qui vous a semblé plausible d'abord, a enfin choqué votre opinion sur ce principalement que nous ignorons la cause radicale qui fait que les corps graves descendent, sur quoi vous dites qu'il y a trois opinions différentes et que, de toutes les trois, les conséquences semblent différentes.

(1) Suite à la Lettre IX et seconde réponse à la Lettre VIII. Dans les *Varia*, l'article 7 suit immédiatement le n° 1. — La réplique de Roberval est perdue.

3. Je ne répète point vos mots ni vos raisons; je me contente d'y répondre et *primo* en la première opinion.

En votre figure (*fig.* 18), vous dites qu'il vous semble que, si le point D ou E convient avec le centre commun des choses pesantes,

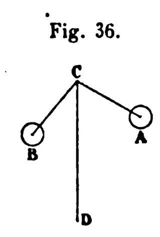
Fig. 18.



combien que l'un des poids en soit plus proche que l'autre, ils contrepèseront encore et demeureront en équilibre. Puisque, dites-vous (pour me servir de vos propres termes), ces deux poids sont égaux et ont tous deux même inclination de s'unir au centre commun des choses pesantes, l'un n'a aucun avantage sur l'autre pour le déplacer de son lieu.

Or, si ce raisonnement est bon, voyez-le dans la figure suivante (*fig.* 36), dans laquelle j'emploierai les mêmes mots.

Fig. 36.



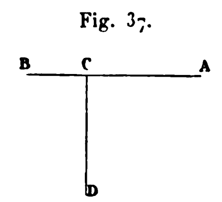
Soit le centre de la terre D, un point dans sa surface ou ailleurs C; soit jointe la ligne CD, et soit au point C attaché le levier BCA, duquel les bras BC, CA soient égaux et les poids B et A aussi égaux, l'angle BCA ferme. S'il n'y avoit point le poids en B, la ligne CA s'uniroit à la ligne CD, c'est-à-dire que le poids A s'approcheroit du centre D autant qu'il pourroit; et tout de même de la ligne BC.

Soit fait l'angle BCD moindre que DCA; par le précédent raisonnement, le levier s'arrêtera (ce qui est contre l'expérience), puisque les deux poids A et B sont égaux et ont tous deux même inclination de s'unir au centre D *sive* à la ligne CD, et l'un n'a aucun avantage sur

l'autre pour le déplacer de son lieu. Or, de même qu'en ce cas l'expérience nous fait voir que ces deux poids approcheront également du centre D et de la ligne CD, il ne faut pas douter qu'au premier cas ils n'approchent également du centre de la terre, et la raison de toutes ces deux propositions est, qu'ayant même inclination au centre et ne pouvant tous deux y descendre, à cause qu'ils s'entr'empêchent, ils y approchent du moins également : autrement la force de celui qui y approcheroit davantage seroit plus grande.

4. L'exemple du levier horizontal (*fig.* 37) ne fait rien à la question : car, pour marquer que les poids B et A n'ont pas leur inclina-

Fig. 37.



tion au point C, il ne faut qu'ôter la ligne CD, sur laquelle le levier s'appuie, et le levier ne restera pas de demeurer, s'il est pressé par les poids A et B horizontalement, de sorte que le point C n'est non plus considérable que tel autre de la ligne BA que vous prendrez. Et, cela étant, l'exemple est inutile, parce que la principale raison de mon principe dépend de l'inclination des graves au centre de la terre.

5. Ce que vous ajoutez, de deux poids qui seroient inégaux, joints comme dessus à une ligne droite ferme et de soi sans poids, n'est non plus recevable : car, vous accordant que, lorsque vous menez un plan perpendiculaire à la ligne qui joint les deux poids, comme vous faites en votre figure [1], il est certain qu'en ce cas il y a de chaque côté du centre une grandeur égale; il arrive pourtant cent cas auxquels, si vous coupez les deux poids par un autre plan passant par le centre, les

[1] *Voir fig.* 20, Lettre VIII, 6.

grandeurs qui seront de chaque côté seront inégales, et ainsi un même corps en même temps arrêtera et n'arrêtera pas.

Et n'importe de dire que ce plan doit être toujours perpendiculaire à la ligne qui joint les deux graves. Car vous savez qu'autour du centre tous endroits sont indifférens et *omnia intelliguntur sursum, omnia deorsum*.

Il faut donc nécessairement prendre le repos des poids, non pas de cette façon, mais de la proportion réciproque suivant mon sentiment.

Voilà, en peu de mots, la réponse à votre première opinion, que j'eusse pu étendre davantage et tirer même la démonstration de mon principe de l'expérience que je vous ai donnée, comme il vous sera aisé de voir.

6. Si la seconde opinion est vraie, mon principe est infaillible. Car en ce cas vous dites que le corps pèsera d'autant moins qu'il sera proche du centre, mais cette diminution ne sera pas en la raison des éloignemens. Or, puisqu'un corps pèse moins en ce cas à mesure qu'il est plus proche du centre, donc il sera toujours pressé par le plus éloigné, jusques à ce qu'ils soient également éloignés du centre.

En la troisième opinion les mêmes raisons sont bonnes.

Je serai bien aise que M. Pascal voie ma Lettre, si vous l'agréez.

7. Permettez-moi de changer de matière et de vous demander la démonstration de cette proposition que j'avoue franchement que je n'ai encore su trouver, quoique je sois assuré qu'elle est vraie [1] :

Summa quadratorum a duabus rectis rationalibus longitudine commen-

[1] La proposition que Fermat énonce dans le langage euclidien peut s'exprimer comme suit :

Si a et b sont rationnels et que l'on ait

$$a^2 + b^2 = 2(a+b)x + x^2,$$

x et x^2 seront irrationnels.

L'*apotome* est proprement la différence de deux grandeurs incommensurables entre elles, mais dont les carrés sont rationnels (Euclide, X, 73) ; $x = \sqrt{(a+b)^2 + a^2 + b^2} - (a+b)$ sera dès lors une *apotome*, si le radical est incommensurable avec $a+b$. — *Voir* plus loin Lettre XIII, 8.

surabilibus, si ad duplum summæ laterum applicetur excedens figurâ quadratâ, latitudo excessûs erit apotome.

Vous ne sauriez croire combien la science du dixième Livre d'Euclide est défectueuse : je veux dire que cette connoissance n'a pas encore fait de grands progrès et qu'elle est pourtant de grandissime usage. J'y ai découvert beaucoup de nouvelles lumières, mais encore la moindre chose m'arrête, comme le théorème que je viens de vous écrire, qui semble d'abord plus aisé à démontrer qu'il n'est pas.

J'attends de vos nouvelles et suis etc.

XII.

FERMAT A MERSENNE.

< SEPTEMBRE OU OCTOBRE 1636. >

(A f^{os} 6–9, B f^{os} 12vo-14vo.)

REVERENDE PATER,

1. Quamvis id agam ut pro OEdipo Davum (¹) restituam, et libentissime profitear quæstionem Domini de Sainte-Croix ad meam notitiam (²) non pervenisse, liceat tamen numeros ab ipso exhibi-

(¹) Allusion au vers 194 de l'*Andria* de Térence :

Non hercle intellego. — Non? hem. — Davos sum, non Œdipus.

(²) Il est malaisé de déterminer si la question dont il s'agit ici est bien celle dont il est parlé Lettres VI, **7**, et X, **2**, ainsi que plus loin, XII, **5**, ou une autre des cinq questions numériques proposées par S^{te} Croix à Descartes en avril 1638, à savoir :

I. *Trouver un trigone qui, plus un trigone tétragone, fasse un tétragone, et de rechef, et que de la somme des côtés des tétragones résulte le premier des trigones et de la multiplication d'elle par son milieu le second. J'ai donné* 15 *et* 120. *J'attends que quelqu'un y satisfasse par d'autres nombres ou qu'il montre que la chose est impossible.*

II. *Trouver un trirectangle dont chacun des côtés soit l'aire d'un trirectangle. J'ai donné* 210, 720, 750. *J'attends etc.*

III. *Trouver un barlong ou tétragone plus sa pleure et tel que l'aggrégat du dit tétra-*

tos (¹) solutione problematis abs te propositi compensare, et quæstiones aliquot ἀμοιβαίας subjicere, quarum enodationem ad nos serius

gone et de son double tétragone fasse un tétragone dont la pleure soit le barlong ou tétragone plus sa pleure. J'ai donné 6. *J'attends etc.*

IV. (*Voir* ci-avant, Lettre VI, **7**, note.)

V. *On demande aussi un nombre dont les parties aliquotes fassent le double et, pour ce qu'on en a déjà trois qui sont* 120, 672 *et* 523776, *il est question de trouver le quatrième.*

Les renseignements tirés de la correspondance de Descartes sont contradictoires; dans une lettre à Mersenne du 22 juin 1638, il dit (éd. Clerselier, II, 88) :

« Je serai bien aise de savoir si les réponses de M. Fermat ont satisfait davantage » M. de Sainte-Croix que les miennes; mais pour moi, je trouve plaisant que, *de quatre » questions, n'y en ayant qu'une qu'il résout à peine* en donnant un nombre qui y satis- » fait, il ne laisse pas de faire des bravades sur ce sujet, disant qu'il ne se contente pas » de résoudre ces questions à la mode de M. de Sainte-Croix, etc., et en propose une » autre toute semblable et même qui est bien plus aisée. »

Le 30 juin 1638 (éd. Clerselier, III, 62), il écrit d'autre part à Mersenne :

« Je lui ai aussi proposé (à Gillot) la quatrième question de M. de Sainte-Croix qui est » de trouver deux nombres chacun desquels, comme aussi la somme de leur agrégat, ne » soit que de trois tétragones, à cause que vous me mandez que c'est *celle qui a semblé » à M. de Fermat la plus difficile.* »

On doit remarquer que la question II de Sainte-Croix à Descartes a d'abord été proposée par Fermat à Sainte-Croix qui la résolut (ci-après, Lettre XVIII, **3**), que des quatre autres, la question V avait été posée par Mersenne dans l'Épître dédicatoire de ses *Préludes de l'Harmonie universelle* en 1634 (*voir* Lettre III, **2**), avec l'indication du nombre 120. Fermat trouva le nombre 672 (Lettres XII, **4**, et XIII, **4**). Le troisième nombre 523776, que ne donne pas la méthode de Fermat (IV_B), paraît avoir été trouvé par Sainte-Croix à une date postérieure à l'impression de la *Seconde Partie de l'Harmonie universelle* de Mersenne (1637).

La question III, qui se traduit par l'équation

$$x^2 + 2(x^2)^2 = (x^2 + x)^2,$$

est très aisée à résoudre, et il est improbable que ce soit celle devant laquelle Fermat déclarait n'être pas un Œdipe. Il n'en est pas tout à fait de même pour la question I, dont l'énoncé, passablement obscur, semble devoir s'exprimer par les trois équations

$$\frac{x(x+1)}{2} + p^2 = y^2,$$

$$\frac{(y+z)(y+z+1)}{2} + p^2 = z^2,$$

$$y + z = \frac{x(x+1)}{2},$$

avec les conditions que x, y, z soient entiers et p^2 un entier de la forme $\frac{n(n+1)}{2}$.

(¹) Peut-être comme solution de la question II, proposée par Fermat à Sainte-Croix. *Voir* note précédente.

proventuram auguramur, quidquid polliceatur acutissimi vir ingenii.

2. Dum igitur difficilioribus numeris tentationem honestamus, ut ipse loquitur, ita proponimus [1] :

1° *Invenire triangulum rectangulum numero, cujus area æquetur quadrato.*

2° *Datâ summâ solidi sub tribus lateribus trianguli rectanguli numero et ipsius hypotenusæ, invenire terminos intra quos area consistit.*

Nec moveat additio solidi et longitudinis; in problematis enim numericis, quantitates omnes sunt homogeneæ, ut omnes sciunt.

3° *Invenire duo quadratoquadratos quorum summa æquetur quadratoquadrato, aut duos cubos quorum summa sit cubus.*

4° *Invenire tres quadratos in proportione arithmetica, ea conditione ut differentia progressionis sit numerus quadratus.*

3. Quatuor problematis duo theoremata [2] adjungimus, quæ, a nobis inventa, a Dom°. de Sainte-Croix demonstrationem exspectant aut, si frustra speraverimus, a nobis ipsis nanciscentur. Sunt autem pulcherrima :

1° *Omnis numerus æquatur uni, duobus aut tribus triangulis,*

uni, 2, 3 aut 4..............	*quadratis.*
uni, 2, 3, 4 aut 5............	*pentagonis.*
uni, 2, 3, 4, 5 aut 6.........	*hexagonis.*
uni, 2, 3, 4, 5, 6 aut 7.......	*heptagonis.*

et eo continuo in infinitum progressu.

Videtur supponere Diophantus secundam partem theorematis, eamque Bachetus experientiâ conatus est confirmare, sed demonstratio-

(1) Des quatre problèmes proposés ici par Fermat, trois sont insolubles. *Voir* au Tome I les *Observations sur Diophante* : pour (1) et (4), l'*Obs.* XLV; pour (3), l'*Obs.* II.

(2) Pour le premier de ces deux théorèmes, *voir* Tome I, l'*Observation* XVIII *sur Diophante* ; pour le second, *comparer* l'*Obs.* XXVII.

nem non attulit. Nos propositionem generalissimam et pulcherrimam primi, nisi fallor, deteximus et pro jure synallagmatis admitti, nescio an jure, postulamus.

2° *Octuplum cujuslibet numeri unitate deminutum componitur ex quatuor quadratis tantum, non solum in integris,* quod potuerunt alii vidisse, *sed etiam in fractis,* quod nos demonstraturos pollicemur.

Et ex hac propositione mira sane deducimus, quæ, si in promptu fuerint Dom°. de Sainte-Croix, saltem Bacheti ingenium et operam videntur inutiliter sollicitasse.

4. Priusquam propositionem de cubis a te propositam construamus, ad quæsitum (¹) de numero 672 respondeo me unicum illum non credere proposito satisfacientem, sed hic unus post 120 in nostra methodo occurrit.

In hujusmodi autem quæstionibus nihil impedit quominus alius alià methodo alios numeros quæstioni satisfacientes nanciscatur : hoc si contigerit Dom°. de Sainte-Croix, libentissime ab eo accipiemus una cum methodo qua usus est. Sunt enim hujusmodi quæstiones pulcherrimæ et difficillimæ et a nemine, quod sciam, hactenus solutæ; infinitas autem similes peculiari nobis methodo jam construximus.

5. Quod ad quæstionem (²) de numeris 3 et 11 spectat, fatemur difficillimam nobis visam et adhuc, post multa tentamenta, ignorari. Et crediderim, donec contrarium appareat, ejus solutionem sorti potius quam arti deberi; sed malim falli me quam Dom. de Sainte-Croix. Ejus solutionem si dignetur impertiri, viam constructionis rogo adjungat.

6. Tuam de cubis quæstionem ita concipimus :

Datis quotlibet numeris in proportione quavis arithmetica, cujus differentia progressionis et numerus terminorum detur, invenire summam cuborum abs omnibus.

(¹) *Voir* plus haut, page 64, note.
(²) *Voir* Lettres VI, 7 et X, 2.

7. Primus casus est quum primus terminus est unitas et differentia progressionis etiam unitas.

Exhibeantur numeri in hac progressione quotlibet :

1.2.3.4.5.6.7.8.9;

quadratum trianguli numerorum æquatur cubis abs omnibus. Ut in hoc exemplo, in quo sunt 9 numeri, triangulus numerorum est 45, cujus quadratus 2025 æquatur summæ cuborum a singulis.

Hæc autem propositio in hoc casu a Bacheto ([1]) et aliis est demonstrata; sequentes casus nos invenimus.

8. Sit primus terminus unitas et differentia progressionis numerus quivis, ut in hoc exemplo in quo 4 est differentia progressionis :

1.5.9.13.17,

sumo triangulum ultimi numeri differentia progressionis unitate deminuta aucti.

Est autem 210, et ejus quadratum

44100.

Ab eo detraho sequentes numeros :

1° Summam totidem cuborum ab unitate in progressione naturali ducentium exordium, quot sunt unitates in differentia progressionis unitate deminuta, eamque summam ductam in numerum terminorum.

Numerus autem, qui in hoc exemplo inde eruetur et quem diximus subtrahendum, est

180.

2° Detraho triplum summæ totidem quadratorum ab unitate in progressione naturali ducentium exordium, quot sunt unitates in differentia progressionis unitate deminuta, illudque ductum in summam numerorum progressionis datæ.

Numerus, qui in hoc exemplo inde eruetur et quem diximus subtrahendum, est

1890.

([1]) Appendix ad librum de numeris polygonis, II, prop. 21.

3° Detraho triplum summæ totidem numerorum ab unitate in progressione naturali ducentium exordium, quot sunt unitates in differentia progressionis unitate deminuta, illudque ductum in summam quadratorum abs numeris progressionis datæ.

Numerus, qui in hoc exemplo inde eruetur et quem diximus subtrahendum, est

10170.

Summa numerorum auferendorum a numero 44100 est 12240, reliquum 31860 : quod si dividas per 4, differentiam progressionis, habebis summam cuborum abs numeris

1.5.9.13.17,

7965, et uniformi in infinitum methodo.

9. Sed nondum constat qua ratione inveniatur summa numerorum :

1.5.9.13.17,

neque quomodo summa quadratorum ab ipsis inveniatur : quod tamen ad secundam et tertiam operationem perficiendum est necessarium.

Primum illud præstitit Bachetus (1) in libello *De numeris multangulis* : secundum ita expedietur.

Sumatur summa tot quadratorum ab unitate in progressione naturali, quot sunt unitates in majore progressionis numero differentia progressionis unitate deminuta aucto.

Hoc autem est facile et ab Archimede (2) in libro *De Spiralibus* traditum.

Ab ea summa :

1° Detrahe summam totidem quadratorum in progressione naturali

(1) Commentaire de Bachet sur les propositions IV et V *Diophanti Alexandrini de multangulis numeris*.

(2) Archimède, *De lineis spiralibus*, prop. 10, donne effectivement la sommation

$$3\sum_1^n n^2 = n^3 + n^2 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

ab unitate incipiente, quot sunt unitates in differentia progressionis unitate deminuta, eamque summam ductam in numerum terminorum.

2° Detrahe duplum summæ totidem numerorum ab unitate, quot sunt unitates in differentia progressionis unitate deminuta, illudque ductum in summam numerorum progressionis datæ.

His ablatis, reliquum, per differentiam progressionis divisum, dabit summam quadratorum ab omnibus.

Ex his duobus casibus reliqui omnes nullo aut minimo negotio elicientur juxta præcepta.

10. Sed hic hærere noluimus, verùm problema totius fortasse Arithmetices pulcherrimum construximus, quo non solum *in quavis progressione summam* quadratorum et cuborum *venamur*, sed *omnium omnino potestatum in infinitum methodo* generalissima, quadratoquadratorum, quadratocuborum, cubocuborum, etc.

11. Ut autem innotescat Dom°. de Sainte-Croix sphingem me aut Œdipum non exspectare, en problema in quadratoquadratorum progressu, quod ita potest theorematice enuntiari :

Exponantur quotlibet numeri in progressione naturali ab unitate ; si a quadruplo ultimi, binario aucto < et > in quadratum trianguli numerorum ducto, demas summam quadratorum a singulis, fiet quintuplum quadratoquadratorum a singulis.

Exemplum : Expositis numeris

1.2.3.4,

quadruplum ultimi binario auctum est 18, quod duci debet in 100, quadratum trianguli numerorum : fit

1800.

Ab eo producto deme summam quadratorum a singulis, quæ est

30.

Superest 1770, cujus quinta pars, 354, æquatur quadratoquadratis a singulis.

In qualibet progressione similiter problema construemus imitando constructionem præcedentem.

Methodum generalem in quibuslibet in infinitum potestatibus trademus, si visum fuerit aut tibi aut Domº. de Sainte-Croix.

12. Interim addimus propositionem pulcherrimam a nobis inventam, quæ nobis lucem dedit ad hujusmodi propositiones inveniendas (¹) :

In progressione naturali ultimus numerus
in proxime majorem facit duplum trianguli collateralis,
in triangulum numeri proxime majoris facit triplum pyramidis collateralis,
in pyramidem numeri proxime majoris facit quadruplum triangulotrianguli collateralis,
et eâ in infinitum uniformi methodo.

(¹) *Voir* Tome I, l'*Observation* XLVI *sur Diophante.* — Il est très remarquable que cette proposition capitale, qui donne, de fait, la composition des coefficients du binôme, après avoir été ainsi communiquée en 1636 à Mersenne, à Sainte-Croix et à Roberval (*ci-après* Lettre XV, **3**), soit restée assez ignorée pour que dix-huit ans après, Pascal, en la retrouvant sous une autre forme, n'ait eu aucun soupçon de la très grande antériorité de la découverte de Fermat.

On lit dans le *Traité des ordres numériques* (Œuvres de Blaise Pascal, édition de 1779, t. V, pp. 65-66), après la proposition XI :

« Les manières de tourner une même chose sont infinies : en voici un illustre exemple » et bien glorieux pour moi. Cette même proposition que je viens de rouler en plusieurs » sortes, est tombée dans la pensée de notre célèbre conseiller de Toulouse, M. de Fermat; et, ce qui est admirable, sans qu'il m'en eût donné la moindre lumière, ni moi à » lui, il écrivoit dans sa province ce que j'inventois à Paris, heure pour heure, comme » nos lettres écrites et reçues en même temps le témoignent. Heureux d'avoir concouru » en cette occasion, comme j'ai fait encore en d'autres d'une manière tout à fait étrange, » avec un homme si grand et si admirable, et qui, dans toutes les recherches de la plus » sublime géométrie, est dans le plus haut degré d'excellence, comme ses ouvrages, que » nos longues prières ont enfin obtenus de lui, le feront bientôt voir à tous les géomètres » de l'Europe, qui les attendent! La manière dont il a pris cette même proposition est » telle : »

» *En la progression naturelle qui commence par l'unité, un nombre quelconque étant* » *mené dans le prochainement plus grand produit le double de son triangle.* »

» *Le même nombre, étant mené dans le triangle du prochainement plus grand, pro-* » *duit le triple de sa pyramide.* »

» *Le même nombre, mené dans la pyramide du prochainement plus grand, produit le* » *quadruple de son triangulotriangulaire.* »

» *Et ainsi à l'infini, par une méthode générale et uniforme.* »

» Voilà comment on peut varier les énonciations. »

13. De triangulis rectangulis ([1]) propositio non satis perspicue, ut opinor, in tua epistola est concepta : solvetur a me fortasse, si clarius proposueris.

Addictissimus tibi,

FERMAT.

XIII.

FERMAT A ROBERVAL.

LUNDI 22 SEPTEMBRE 1636.

(*Va.*, p. 136-137.)

MONSIEUR,

1. Je surseoirai avec votre permission à vous écrire sur le sujet des propositions de Méchanique, jusques à ce que vous m'aurez fait la faveur de m'envoyer la démonstration des vôtres, ce que j'attends au plus tôt sur la promesse que vous m'en faites ([2]).

2. Sur le sujet de la méthode ([3]) *de maximis et minimis*, vous savez que, puisque vous avez vu celle que M. Despagnet vous a donnée, vous avez vu la mienne que je lui baillai, il y a environ sept ans, étant à Bordeaux.

Et en ce temps-là je me ressouviens que M. Philon ayant reçu une de vos lettres, dans laquelle vous lui proposiez de *trouver le plus grand cône de tous ceux qui auront la superficie conique égale à un cercle donné*, il me l'envoya et j'en donnai la solution à M. Prades pour vous la rendre. Si vous rappelez votre mémoire, vous vous en souviendrez peut-être, et que vous proposiez cette question comme difficile et ne

([1]) Aucune autre allusion, dans la Correspondance qui nous reste de Fermat, n'est faite à cette proposition. Peut-être s'agit-il de la question I de Sainte-Croix à Descartes (*voir* plus haut pages 63-64, note), dont l'énoncé énigmatique prêtait facilement à confusion.

([2]) Dans une réponse perdue à la lettre XI, Roberval annonçait sa lettre suivante, XIV.

([3]) *Voir* Lettre IX, 8.

l'ayant pas encore trouvée. Si je rencontre parmi mes papiers votre lettre, que je gardai pour lors, je vous l'envoierai.

3. Si M. Despagnet ne vous a proposé ma méthode ([1]) que comme je la lui baillai pour lors, vous n'avez pas vu ses plus beaux usages; car je la fais servir, en diversifiant un peu :

1° Pour l'invention des propositions pareilles à celles du conoïde que je vous envoyai par ma dernière ([2]) ;

2° Pour l'invention des tangentes des lignes courbes, sur lequel sujet je vous propose ce problème : *Ad datum punctum in conchoide Nicomedis invenire tangentem* ([3]) ;

3° Pour l'invention des centres de gravité de toute sorte de figures, aux figures même différentes des ordinaires, comme en mon conoïde et autres infinies, de quoi je ferai voir des exemples quand vous voudrez ([4]).

4° Aux problèmes numériques auxquels il est question de parties aliquotes ([5]) et qui sont tous très difficiles.

4. C'est par ce moyen que je trouvai 672 duquel les parties sont doubles aussi bien que celles de 120 le sont de 120.

C'est aussi par là que j'ai trouvé des nombres infinis qui font la même chose que 220 et 284, c'est-à-dire que les parties du premier égalent le second et celles du second le premier. De quoi si vous voulez voir un exemple pour tâter la question, ces deux y satisfont :

17296 et 18416.

Je m'assure que vous m'avouerez que cette question et celles de sa sorte sont très malaisées; j'en envoyai il y a quelque temps la solution à M. de Beaugrand.

([1]) Fermat paraît ici entendre, par sa méthode, le procédé de substituer $A + E$ à A dans une relation en A.
([2]) *Voir* Lettre IX, 7, et plus loin XIII, 6.
([3]) *Voir* Tome I, p. 161.
([4]) *Voir* Tome I, p. 136, note 3.
([5]) *Voir* Lettre IV, 3, et Pièces IV_A, IV_B.

J'ai aussi trouvé des nombres en proportion donnée ou qui surpassent d'un nombre donné leurs parties aliquotes; et plusieurs autres.

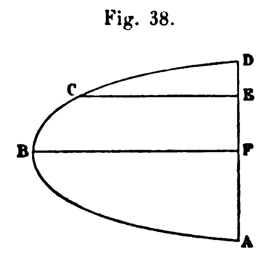
5. Voilà quatre sortes de propositions que ma méthode embrasse et que peut-être vous n'avez pas sues.

Sur le sujet du 1°, j'ai quarré infinies figures comprises de lignes courbes (¹); comme, par exemple, si vous imaginez une figure comme la parabole, en telle sorte que les cubes des appliquées soient en proportion des lignes qu'elles coupent du diamètre. Cette figure approchera de la parabole et ne diffère qu'en ce qu'au lieu qu'en la parabole on prend la proportion des quarrés, je prends en celle-ci celle des cubes; et c'est pour cela que M. de Beaugrand, à qui j'en fis la proposition, l'appelle *parabole solide*.

Or j'ai démontré que cette figure est au triangle de même base et hauteur en proportion sesquialtère. Vous trouverez, en la sondant, qu'il m'a fallu suivre une autre voie que celle d'Archimède en la quadrature de la parabole et que je n'y fusse jamais venu par là.

6. Puisque vous avez trouvé ma proposition du conoïde excellente, la voici plus générale (*fig.* 38) :

Fig. 38.



Si circa rectam DA *parabole, cujus vertex* B *et axis* BF *et applicata* AF, *circumducatur, fiet conoides novæ speciei, quo secto bifariam, plano ad axem recto, dimidium ipsius ad conum ejusdem basis et altitudinis est ut* 8 *ad* 5.

(¹) *Voir* Tome I, pages 255 à 266.

Si verò plano secetur ad axem recto inæqualiter, puta per punctum E, *segmentum conoidis* ABCE *ad conum ejusdem basis et altitudinis est*

ut quintuplum quadrati ED unà cum rectangulo AED bis
et rectangulo sub DF in AE
ad quadrati ED quintuplum,

et vicissim segmentum conoidis DCE *est ad conum ejusdem basis et altitudinis*

ut quintuplum quadrati AE unà cum rectangulo AED bis
et rectangulo sub DF in DE
ad quadrati AE quintuplum.

Pour la démonstration, outre les aides que j'ai tirées de ma méthode, je me suis servi des cylindres inscrits et circonscrits.

7. J'avois omis le principal usage de ma méthode qui est pour l'invention des lieux plans et solides; elle m'a servi particulièrement à trouver ce lieu plan que j'avois auparavant trouvé si difficile (1) :

Si a quotcumque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ et sint species quæ ab omnibus fiunt dato spatio æquales, punctum continget positione datam circumferentiam.

Tout ce que je viens de vous dire ne sont qu'exemples, car je vous puis assurer que, sur chacun des points précédents, j'ai trouvé un très grand nombre de très belles propositions. Je vous envoierai la démonstration de celles que vous voudrez : permettez-moi néanmoins de vous prier de les essayer plutôt et de m'en donner votre jugement.

8. Au reste, depuis la dernière Lettre que je vous écrivis, j'ai trouvé la démonstration de la proposition que je vous faisois (2). Elle m'a donné grandissime peine et ne se présente pas d'abord.

Je vous conjure de me faire part de quelqu'une de vos pensées et de me croire, etc.

(1) *Voir* Tome I, page 37 (*Lieux plans d'Apollonius*, II, 5).
(2) *Voir* Lettre XI, 7.

XIV.

ROBERVAL A FERMAT (¹).

SAMEDI 11 OCTOBRE 1636.

(*Va*, p. 138-141.)

MONSIEUR,

1. Je vous envoie la démonstration de la proposition fondamentale de notre Méchanique, ainsi que je vous l'ai promise. En quoi je suivrai l'ordre commun d'expliquer auparavant les définitions et principes desquels nous nous servons.

2. Nous appelons en général une *puissance* cette qualité par le moyen de laquelle quelque chose que ce soit tend ou aspire en un autre lieu que celui où elle est, soit en bas, en haut ou à côté, soit que cette qualité convienne naturellement à la chose ou qu'elle lui soit communiquée d'ailleurs. De laquelle définition il s'ensuit que tout poids est une espèce de puissance, puisque c'est une qualité par le moyen de laquelle les corps aspirent vers les parties inférieures.

Souvent nous appelons aussi du nom de *puissance* la même chose à laquelle la puissance convient (comme un corps pesant est appelé un *poids*), mais avec cette précaution que ce soit à l'égard de la vraie puissance, laquelle, augmentant ou diminuant, sera appelée *plus grande* ou *moindre puissance*, quoique la chose à quoi elle convient demeure toujours la même.

Si une puissance est pendue ou arrêtée à une ligne flexible et sans poids, laquelle ligne soit attachée par un bout à quelque arrêt, en sorte qu'elle soutienne la puissance tirant sans empêchement contre cette ligne, la puissance et la ligne prendront quelque position, en

(¹) Réponse à la Lettre XIII. — Le texte de la présente a été, comme celui de la Lettre VIII, restitué d'après le manuscrit de la Bibliothèque Nationale, latin n° 7226, f° 34 et suiv.

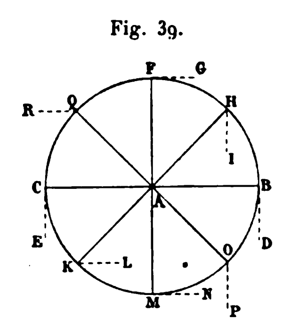
laquelle elles demeureront en repos, et la ligne sera droite par force. Soit icelle ligne appelée le *pendant* ou la *ligne de direction* de la puissance; et le point, par lequel la ligne est attachée à l'arrêt, soit appelé le *point d'appension*, lequel pourra être quelquefois au bras d'un levier ou d'une balance; et lors la ligne droite, menée du centre de l'appui du levier ou de la balance jusques au point d'appension, soit appelée la *distance* ou le *bras* de la puissance, laquelle distance ou bras nous supposons être une ligne ferme considérée de soi sans poids. Davantage, l'angle, compris du bras de la puissance et de la ligne de direction, soit appelé l'*angle de direction* de la puissance.

Premier axiome. — Après ces définitions, nous posons pour principe qu'au levier et à la balance, les puissances égales, tirant par des bras égaux et des angles de direction égaux, tireront également; et, si en cet état elles tirent l'une contre l'autre, elles feront équilibre; que si elles tirent ensemble ou de même part, l'effet sera doublé.

Si, les puissances étant égales et les angles de direction égaux, les bras sont inégaux, la puissance qui sera sur plus grand bras fera plus d'effet.

Comme en cette première figure (*fig.* 39), le centre de la balance

Fig. 39.



ou du levier étant A, si les bras AB et AC sont égaux et les angles ABD, ACE égaux, les puissances égales D, E tireront également et feront équilibre. De même, le bras AF étant égal à AB, l'angle AFG à l'angle ABD, et la puissance G à la puissance D, ces deux puissances G, D tireront également et, pour ce qu'elles tirent de même part, l'effet sera

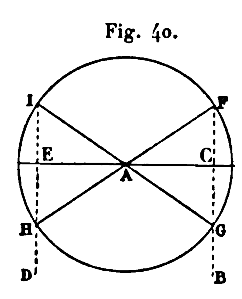
doublé. Au contraire, la puissance G et la puissance E feront équilibre. Par le même principe, les puissances I, L contrepèseront si, étant égales, les bras AK, AH sont égaux et les angles AHI, AKL aussi égaux. Il en sera de même des puissances P et R, si le tout est disposé de même.

Et en ce cas nous ne mettons point d'autre différence entre les poids et les autres puissances, sinon que les poids tendent et aspirent tous vers le centre des choses pesantes, et les puissances peuvent être entendues aspirer vers toutes les parties de l'univers avec autant, plus ou moins de force que les poids. Ainsi les poids et leurs parties tirent par des lignes de direction qui toutes concourent à un même point, et les puissances et leurs parties peuvent être entendues tirer de telle sorte que toutes les lignes de direction soient parallèles entre elles.

Deuxième axiome. — En second lieu, nous supposons qu'une puissance et sa ligne de direction demeurant toujours en même position et le centre de la balance ou du levier de même, quel que puisse être le bras mené du centre de la balance à la ligne de direction, la puissance, tirant de soi toujours de même sorte, fera toujours même effet.

Comme en cette seconde figure (*fig.* 40), le centre de la balance étant A, la puissance B et sa ligne de direction BF, prolongée tant que

Fig. 40.



de besoin, à laquelle aboutissent les bras AG, AC, AF. En cet état, soit que la ligne BF soit liée au bras AF ou AC [ou AG] ou à un autre bras mené du centre à la ligne de direction AF, nous supposons que cette puissance B fera toujours un même effet sur la balance; et si, tirant par le bras AC, elle fait équilibre avec la puissance D tirant par le bras

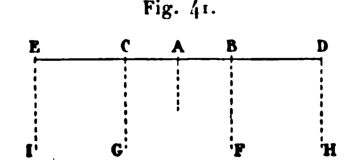
AE, lorsqu'elle tirera par le bras AF ou AG, elle fera encore équilibre avec la puissance D tirant par le bras AE.

Ce principe, quoiqu'il ne soit pas expressément dans les auteurs, il est néanmoins usurpé tacitement par tous ceux qui en ont eu affaire, et l'expérience le confirme constamment.

Troisième axiome. — En troisième lieu, nous posons que, si les bras d'une balance ou d'un levier sont directement posés l'un à l'autre et, qu'étant égaux, ils soutiennent des puissances égales desquelles les angles de direction soient droits, ces puissances pèseront également sur le centre de la balance, soit qu'elles soient proche du même centre, soit qu'elles en soient fort éloignées, soit que toutes deux soient ramassées au même centre.

Comme en la troisième figure (*fig.* 41), la balance étant ED, le centre A, les bras égaux AD, AE soutenant des puissances égales H, I,

Fig. 41.



desquelles les angles de direction ADH, AEI soient droits; nous supposons que ces puissances I, H pèseront de même sur le centre A que si elles étoient plus près du même centre sur les distances égales AB, AC, et encore de même que si ces mêmes puissances étoient ensemble pendues en A, ces angles de direction étant toujours droits.

Première proposition. — Ces principes posés, nous démontrerons facilement, imitant Archimède [1], que sur une balance droite, les puissances, desquelles et de toutes leurs parties les lignes de direction sont parallèles entre elles et perpendiculaires à la balance, contre-pèseront et feront équilibre, quand les mêmes puissances seront entre elles en proportion réciproque de leurs bras. Ce que nous pensons vous être aussi facile qu'à nous.

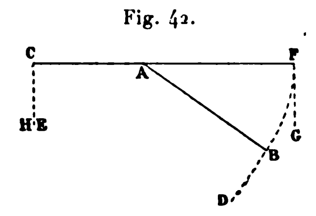
(1) ARCHIMÈDE, *De planorum æquilibriis*, I, 6 et 7.

En suite de quoi nous démontrerons cette proposition universelle, à laquelle nous butons.

Deuxième proposition. — En toute balance ou levier, si la proportion des puissances est réciproque à celle des lignes perpendiculaires menées du centre ou point de l'appui sur les lignes de direction des puissances, ces puissances, tirant l'une contre l'autre, feront équilibre et, tirant d'une même part, elles feront un pareil effet, c'est-à-dire qu'elles auront autant de force l'une que l'autre pour mouvoir la balance.

Soit en la quatrième figure (*fig.* 42) le centre de la balance A, le bras AB plus grand que le bras AC, et soient premièrement les lignes

Fig. 42.



de direction BD, CE perpendiculaires aux bras AB, AC, par lesquelles lignes tirent les puissances D, E, lesquelles seront des poids, si on veut, et qu'il y ait même raison de la puissance D à la puissance E que du bras AC au bras AB, les puissances tirant l'une contre l'autre. Je dis qu'elles feront équilibre sur la balance CAB.

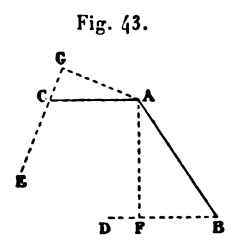
Car, soit prolongé le bras CA jusques en F, en sorte que AF soit égale à AB, et soit considérée CAF comme une balance droite de laquelle le centre soit A. Soient aussi entendues deux puissances G et H, desquelles et de toutes leurs parties les lignes de direction soient parallèles à la ligne CE; et que la puissance G soit égale à la puissance D et la puissance H égale à la puissance E, l'une, savoir G, tirant sur le bras AF et l'autre, savoir H, tirant sur le bras AC.

Lors, par la première proposition, les puissances G et H feront équilibre sur la balance CAF; mais, par le premier principe, la puissance D sur le bras AB fait le même effet que la puissance G sur le bras AF :

partant la puissance D sur le bras AB fait équilibre avec la puissance H sur le bras AC et, la puissance H tirant de même sorte sur le bras AC que la puissance E, par le même premier axiome, la puissance D sur le bras AB fera équilibre avec la puissance E sur le bras AC.

Maintenant, en la cinquième figure (*fig.* 43), soit le centre de la balance A, les bras AB, AC, les lignes de direction BD, CE qui ne

Fig. 43.



soient pas perpendiculaires aux mêmes bras, et les puissances D, E tirant par les mêmes lignes de direction; sur lesquelles lignes soient menées des perpendiculaires du centre A, savoir AF sur BD et AG sur EC; et que, comme la ligne AF est à AG, ainsi soit la puissance E à la puissance D, lesquelles puissances tirent l'une contre l'autre. Je dis qu'elles feront équilibre sur la balance CAB.

Car, soient entendues les lignes AF, AG comme les deux bras d'une balance GAF, sur lesquels tirent les puissances D, E par les lignes de direction FD, GE, ces puissances feront équilibre, par la première partie de cette seconde proposition; mais, par le second axiome, la puissance D sur le bras AF fait le même effet que sur le bras AB, et la puissance E sur le bras AG fait le même effet que sur le bras AC; partant, la puissance D sur le bras AB fait équilibre avec la puissance E sur le bras AC.

Il y a plusieurs cas suivant les chutes des perpendiculaires, mais il vous sera facile de voir que tous n'ont qu'une même démonstration. Il est aussi facile de démontrer que, si les puissances tirent de même part, elles feront même effet l'une que l'autre, et l'effet des deux ensemble sera double de celui d'une seule.

J'attends votre jugement sur cette démonstration et, si vous l'ap-

prouvez, nous communiquerons ensuite des conséquences qui en dépendent.

3. J'ai trouvé la démonstration (¹) de la somme des quarrés de deux côtés rationaux, commensurables en longueur, appliquée au double de la somme des côtés, excédant d'une figure quarrée. Mais, puisque vous l'avez aussi trouvée, je ne vous dirai ici que mon principal fondement qui est que, de deux nombres quelconques, la somme de deux fois le quarré du premier, deux fois le quarré du second et deux fois le produit des deux nombres, n'est pas un nombre quarré, d'autant que, prenant les moindres nombres de leur raison, un nombre simplement pris n'est pas quarré. Si nous avons tous deux un même moyen, ceci suffit; si vous en avez un autre, ce que vous reconnoîtrez par ce discours, vous me ferez faveur de me l'apprendre, et moi je vous écrirai le mien tout au long, si vous le désirez.

4. J'ai aussi trouvé la démonstration (²) de votre conoïde et celle de votre parabole solide et, en conséquence, celles d'une infinité d'autres pareilles, quarréquarrées, quarrésolides etc.

5. J'ai trouvé les tangentes de toutes ces figures : par exemple, en la parabole solide, la portion de l'axe, prise entre la tangente et le sommet, est double de la portion du même axe, prise entre le sommet et la ligne appliquée de l'attouchement à l'axe.

6. J'ai, par le même moyen, quarré la parabole géométriquement, autrement qu'Archimède.

7. Et je me trompe fort si je n'ai rencontré le même moyen que vous, me servant des lignes parallèles à l'axe et des portions de ces lignes prises entre les paraboles et la ligne qui touche les mêmes paraboles par le sommet, lesquelles portions se suivent en la raison de l'ordre naturel des nombres quarrés ou des nombres cubes etc. Or, la somme des quarrés est toujours plus que le tiers du cube qui a pour

(¹) *Voir* Lettre XI. 7.
(²) *Voir* Lettres IX. 7; XIII. 3 et 6.

côté le côté du plus grand quarré, et la même somme des quarrés, le plus grand étant ôté, est moindre que le tiers du même cube; la somme des cubes plus que le quart du quarréquarré et, le plus grand cube ôté, moins que le quart; etc. Si par ce discours vous reconnoissez que ce n'est pas votre moyen, j'en serai d'autant plus réjoui pour ce que nous en aurons deux, et vous me ferez la faveur de m'envoyer le vôtre, faisant le même de ma part.

8. Pour les tangentes de la conchoïde, je les ai considérées il y a longtemps, comme étant déterminations d'équations quarréquarrées. Sur ce sujet, il y a deux points en la conchoïde par lesquels on ne peut mener des tangentes : je vous prie de les considérer et vous trouverez une admirable propriété d'angles au sommet l'un de l'autre à la section d'une ligne droite et de la conchoïde (1).

9. J'estime vos propositions (2) des nombres et celle du lieu plan fort difficiles; ce que je saurai mieux quand j'aurai eu le loisir de les considérer, comme aussi les centres de gravité des figures susdites tant planes que solides, n'étant pas résolu pourtant de m'obstiner après; car j'aimerai mieux tenir de vous ce que vous en aurez, si vous l'avez agréable.

10. Je vous prie pourtant de me mander si le centre de gravité de votre demi-conoïde n'est pas ce point où l'axe est divisé de sorte que l'un des segments est à l'autre comme 11 à 4, pour ce qu'un léger raisonnement et non encore bien considéré m'a semblé me mener à cette raison (3).

11. Une autre fois je vous pourrai mander de nos propositions ainsi que vous le désirez. Pour cette heure, que je n'emploie à écrire ceci qu'un temps dérobé, je vous envoierai seulement celle-ci :

De deux cônes droits égaux et isopérimètres étant données les bases inégales ou les hauteurs inégales, trouver les cônes.

(1) *Voir* Lettre XIII, 3. — Roberval parle ici des points d'inflexion de la conchoïde.
(2) *Voir* Lettres XIII, 4 et 7.
(3) *Voir* ci-après Lettre XV, 5.

Quand je dis *isopérimètres,* j'entends les bases y comprises ou exceptées, comme vous voudrez.

Vous en aurez la solution quand il vous plaira, si vous ne voulez prendre la peine de la trouver vous-même, et je vous l'aurois envoyée dès maintenant, n'étoit que je crois que vous désirerez avoir le plaisir d'y penser.

Attendant que vous me fassiez la faveur de m'écrire, je demeurerai etc.

XV.

FERMAT A ROBERVAL.

MARDI 4 NOVEMBRE 1636.

(*Va*, p. 146-147; B f° 2v°.)

MONSIEUR,

1. Me réservant à vous écrire une autre fois les défauts que j'ai trouvés dans votre démonstration (¹) et dans votre Livre imprimé (²), que j'espère vous faire avouer par vos propres maximes, je me contenterai de répondre présentement aux autres points de votre Lettre.

2. Et premièrement vous saurez que nous avons concouru au même *medium* sur le sujet de la somme des deux quarrés rationaux, commensurables en longueur, appliquée au double de la somme des côtés, excédant d'une figure quarrée (³).

3. Vous vous êtes servi aussi d'un même *medium* (⁴) que moi en la quadrature des paraboles solides, quarréquarrées etc. à l'infini; mais vous supposez une chose [vraie] de laquelle vous n'avez possible

(¹) Lettre XIV, 2. — Fermat annonce les objections contenues dans la Pièce XVI, ci-après.

(²) *Voir* Lettre VII, 4, note 1.

(³) *Voir* Lettre XIV, 3.

(⁴) *Voir* Lettre XIV, 7.

pas la démonstration précise, qui est que la somme des quarrés est plus grande que le tiers du cube qui a pour côté le côté du plus grand quarré; la somme des cubes plus que le quart du quarréquarré; la somme des quarréquarrés plus qu'un cinquième du quarrécube; etc.

Or, pour démontrer cela plus généralement, il faut, étant donné un nombre *in progressione naturali*, trouver la somme, non seulement de tous les quarrés et cubes, ce que les auteurs qui ont écrit ont déjà fait (1), mais encore la somme des quarréquarrés, quarrécubes etc., ce que personne que je sache n'a encore trouvé; et pourtant cette connoissance est belle et de grand usage et n'est pas des plus aisées.

J'en suis venu à bout avec beaucoup de peine. En voici un exemple :

Si quadruplum maximi numeri binario auctum ducas in quadratum trianguli numerorum, et a producto demas summam quadratorum a singulis, fiet summa quadratoquadratorum quintupla.

Il semble que Bachet, dans son Traité *De numeris multangulis* (2), n'a pas voulu tâter ces questions après avoir fait celle des quarrés et des cubes; je serai bien aise que vous vous exerciez pour trouver la méthode générale, pour voir si nous rencontrerons. En tout cas, je vous offre tout ce que j'y ai fait, qui est tout ce qu'on peut dire sur cette matière.

Voici cependant une très belle proposition, qui peut-être vous y servira; au moins c'est par son moyen que j'en suis venu à bout. C'est une règle que j'ai trouvée pour donner la somme, non seulement des triangles, ce qui a été fait par Bachet et les autres (3), mais encore des pyramides, *triangulotriangulorum* etc. à l'infini. Voici la proposition (4) :

Ultimum latus in latus proxime majus facit duplum trianguli.

(1) *Voir* Lettre XII, **10** et **11**.
(2) *Voir* Lettre XII, **7**, note 1.
(3) Bachet (*Appendix ad librum de numeris polygonis*, I, prop. 18) donne la sommation, non seulement des triangles, mais en général des polygones de même genre ayant pour côtés les nombres consécutifs à partir de l'unité.
(4) *Voir* Lettre XII, **12**.

Ultimum latus in triangulum lateris proxime majoris facit triplum pyramidis.

Ultimum latus in pyramidem lateris proxime majoris facit quadruplum triangulotrianguli.

Et eo in infinitum progressu.

Toutes ces propositions, quoique belles de soi, m'ont servi à trouver la quadrature que je suis bien aise que vous estimiez.

4. Je voudrois avoir assez de loisir pour vous envoyer les propositions des nombres (¹) que vous trouvez si difficiles; elles le sont en effet : même Tartaglia (²) avoit cru qu'elles n'étoient point trouvables par art. J'en ai envoyé la construction au Père Mersenne; il vous la communiquera si vous la lui demandez.

5. Je vous envoierai aussi une autre fois le centre de gravité (³) de toutes ces nouvelles figures, avec la méthode générale pour le trouver. Vous savez cependant que celui du demi-conoïde divise l'axe en proportion de 11 à 5, non pas de 11 à 4, comme vous aviez cru, et que celui des nouvelles paraboles divise l'axe en proportion pareille à celle du parallélogramme, qui a pour hauteur l'axe et pour base celle de la figure, à la figure : ou, pour mieux dire, le diamètre de toute parabole est divisé en tel point [de son diamètre] par le centre de gravité, [en sorte] que le segment d'en bas est à celui d'en haut comme la figure au parallélogramme de même base et de même hauteur.

6. Puisque vous avez trouvé la démonstration de toutes mes propositions, vous m'obligerez beaucoup de prier le Père Mersenne de vous donner mes nouvelles hélices (⁴), desquelles les démonstrations vous seront aussi aisées que celles du conoïde et des paraboles. Il m'écrit qu'on doute ~~de~~ delà de leur vérité; vous la lui confirmerez, s'il vous

(¹) *Voir* Lettre XIV, **9** et Pièces IV_A, IV_B.

(²) Comparer *La seconda parte del General Trattato di numeri et misure di Nicolo Tartaglia* (Venise, 1556), lib. I, cap. IV.

(³) *Voir* Tome I, p. 136. — Cp. Lettre XIV, **10**.

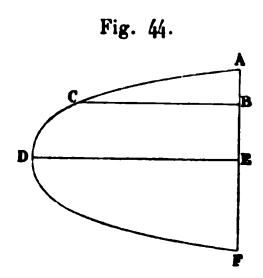
(⁴) *Voir* Pièces III_A, III_B.

plait, et désabuserez Monsieur de ... (1), qui semble ne les avoir pas crues.

7. Mais il n'en faut pas demeurer là, car, pour suppléer tout ce qui semble manquer dans l'Archimède :

Exponatur parabole ACDF (*fig.* 44), *cujus axis* DE, *basis* AF, CB *parallela* DE *et ideo perpendicularis ipsi* AF. *Circa rectam* DE *fixam figura*

Fig. 44.



ADE *conversa constituit conoides Archimedeum; circa* AE *fixam constituit nostrum conoides.*

Sed, si figura ACB *circa* AB *fixam convertatur, constituitur portio nostri conoidis; si autem circa* CB *fixam fiat conversio, quæritur proportio novi istius conoidis ad conum ejusdem basis et altitudinis.*

Hoc autem etiam perfecimus; imo mirabilius quiddam invenimus, ellipsoides cui si conum æqualem inveneris, dabimus circuli quadrationem. — Sed hæc aliàs.

8. Votre question des cônes (2) est si aisée qu'il seroit inutile de vous en écrire la solution.

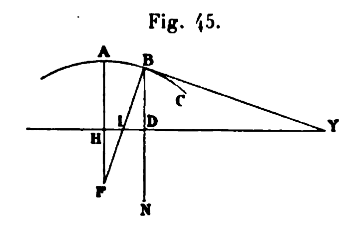
9. Pour les tangentes de la conchoïde (3), j'ai peur que vous aurez équivoqué; car voici ma proposition qui n'exclut aucun point, laquelle j'ai copié sans la vérifier sur mon manuscrit; peut-être que c'est moi qui aurai failli, je vous l'écrirai la première fois.

(1) Beaugrand? *Voir* Lettre XVIII, 4.
(2) *Voir* Lettre XIV, 11.
(3) *Voir* Lettre XIV, 8. — Cp. Tome I, p. 161.

Esto conchois ABC (fig. 45), *cujus polus* F, *intervallum* HA, *et in ea datum punctum* B.

Primum asserimus eam in interiora convexam repræsentandam, licet contrarium Pappo et Eutocio visum fuerit (¹).

Fig. 45.



Deinde tangentem ita ducimus : Jungatur FIB *et perpendicularis* BD *demittatur; rectangulum* BFI, *unà cum quadrato* BD, *ad rectam* BD *applicentur et faciant latitudinem* DN; *fiat*

ut ID *ad* DN, *ita* BD *ad* DY.

Juncta YB *tanget conchoidem*.

J'attends votre réponse et suis etc.

XVI.

OBJECTA A DOMINO DE FERMAT

ADVERSUS PROPOSITIONEM MECHANICAM DOMINI DE ROBERVAL (²).

< DÉCEMBRE 1636 >

(*Va*, p. 141-142.)

Si vera esset propositio mechanica Domini de Roberval, *in vecte quolibet pondera perpendiculis a centro vectis in lineas directionum demissis*

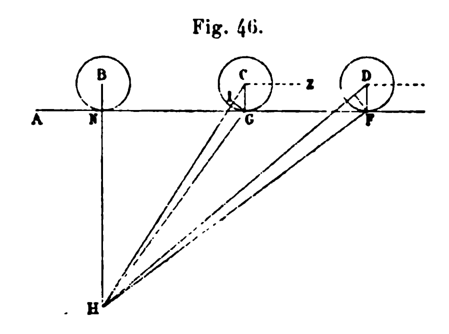
(¹) Pappus, IV, 22 (éd. Hultsch, pp. 242 et 246), Eutocius (Comm. in lib. II de sphæra et cylindro : *Archimède*, éd. Heiberg, vol. III, pp. 117, 119, 120, 122) n'indiquent rien sur le sens de la concavité de la conchoïde : l'observation de Fermat ne porte donc que sur les figures fautives des manuscrits reproduites dans le Pappus de Commandin et dans les anciennes éditions d'Archimède (p. ex., celle de Rivault, Paris, 1615).

(²) Cette Pièce paraît avoir été envoyée à Carcavi, au commencement de décembre 1636 (*voir* Lettre XVII, 1) comme réplique à la Lettre XIV de Roberval.

esse reciproce proportionalia ad astruendam quietem, non posset subsistere proportio gravis ad potentiam in plano inclinato, quam in Libello suo ([1]) tradidit. Hoc perspicue demonstramus :

In prima figura (*fig.* 46), esto punctum in superficie telluris N, centrum terræ H. Junctâ NH, ducatur ANGF perpendicularis ipsi HN,

Fig. 46.



quam quidem ANGF ii qui sunt in puncto N vocant parallelam horizonti. Exponantur sphæræ quarum centra B, C, D, quæ tangant rectam, sive planum per ANGF, in punctis N, G, F.

Patet primum sphæram B a minima potentia moveri, idque Dominus de Roberval non diffitetur, et in puncto N collocatam manere, sed in nullo alio totius plani puncto idem accidit.

Perficiatur figura, ut hic vides. Recta HG, connectens punctum contactûs G et centrum terræ H, ad rectam CG facit angulum obtusum, ideoque sphæra C ad partes GN movebitur. Idem de sphæra D. Sit igitur potentia in Z retinens sphæram C per motum rectæ ANGF parallelum, aut, quod idem est, per rectam ZC. Intelligatur vectis cujus centrum fixum G; ducatur in HC perpendicularis GI.

Sphæræ C motus naturalis est per rectam CH; motus retinens per CZ, ad quam perpendicularis est GC : ergo, ex suppositis Domini de Roberval, est [reciproce]

ut recta GI ad rectam GC, ita potentia retinens in Z ad sphæram C.

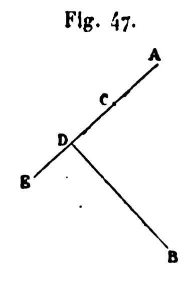
Quod erat demonstrandum.

([1]) Il s'agit du *Traité de Méchanique* de Roberval. *Voir* Lettre VII, 4, note 1.

In sphæra autem D major requiretur potentia ad retinendum et, quo magis distabit a puncto N, eo majore potentia opus erit, quod est mirabile. Ex suppositione autem Domini de Roberval, nunquam in eodem plano variat proportio; quod quàm longe abeat a veritate, ipse viderit.

Sit centrum terræ B (*fig.* 47), planum inclinatum ACDE. In punctis A et C eamdem potentiam retinere, poterat fortasse non incongruum

Fig. 47.



videri Domino de Roberval. Sed, ducto perpendiculo BD, quum in puncto D sit quies et minima potentia retineat, quâ ratione constabit ipsius propositio?

In quolibet autem plano habet locum nostra demonstratio. Omne quippe planum alicui horizonti invenietur parallelum.

Hac propositione evertitur demonstratio Domini de Roberval et brevissimâ viâ ad ipsius hypotheses nova proportio detegitur.

Secundam figuram addideramus, quâ judicium nostrum de ipsius ultima propositione prodere sperabamus. Sed non suppetit tempus.

XVII.

FERMAT A ROBERVAL.

DIMANCHE 7 DÉCEMBRE 1636.

(*Va*, p. 147-148.)

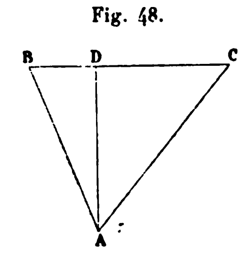
Monsieur,

1. Après vous avoir assuré que je n'ai jamais songé de soutenir une opinion contre mon sentiment et que je serois ravi que votre propo-

sition méchanique ([1]) fût vraie, afin que nous ne fussions plus en peine de sonder la nature par cet endroit, je m'en remettrai du surplus à la lettre que j'écris à M. de Carcavi, à laquelle j'ajouterai seulement que le dernier des principes dont vous vous servez pour l'établissement de votre proposition ne me semble du tout point admissible et que, sans aucun esprit de contradiction, j'estime que, pour établir la proportion des poids qui se meuvent librement, on ne doit pas avoir recours aux forces mouvantes, et qu'au contraire les poids libres doivent servir de règle à tous les autres mouvemens violents; et c'est en quoi je trouve que votre principe est défectueux, outre qu'il est apparemment faux, puisque celui dont je me sers en sa place ne peut, ce me semble, être contredit, et de cela j'en fais juge qui que ce soit.

Sit vectis BDC (fig. 48), *cujus medium* D, *centrum terræ* A; *sit autem recta* DA *vecti perpendicularis et sint æqualia pondera* B *et* C, *ad centrum*

Fig. 48.



terræ per rectas BA, CA *naturaliter annuentia; suspendatur autem vectis a puncto* D *et a quavis potentia retineatur : Aio idem ponderare* B *et* C *corpora ita constituta ac si ambo in puncto* D *ab eadem potentia detineantur.*

Car, puisque la ligne BC est sans poids et que la puissance qui est en D *abstrahit a centro*, où au contraire les poids B et C, *sive sint in punctis* B *et* C, *sive in puncto* D, *vergunt ad centrum motu opposito*, il s'ensuit clairement que la puissance qui retiendra les poids aux points B et C les retiendra aussi en D, et *vice versa*.

([1]) *Voir* Lettre XIV, 2, et Pièce XVI.

Et n'importe d'alléguer qu'il semble que le mouvement qui se fait par des puissances parallèles à la ligne DA est aussi bien contraire au mouvement qui se fait *sursum* par la puissance qui retient en D : car,

1° Il n'est pas si probable de dire qu'un mouvement violent est contraire à un autre mouvement violent, comme de dire qu'un mouvement violent est contraire au mouvement naturel.

2° Le mouvement qui se fait sur les lignes parallèles à DA se fera sur des plans inclinés à l'horizon et desquels la proportion sera plus inconnue que le principe : de sorte que ou il vous faut avouer la vérité de mon principe ou démontrer le vôtre. Au premier cas, je vous démontrerai ma proposition de mon second levier, par vos propres maximes : j'estime que vous aurez grande difficulté au second.

Vous pouvez encore répondre qu'il n'est pas ici question des mouvemens qui se font sur des plans inclinés à l'horizon, parce que vous supposez, et je l'accorde aussi, qu'en tout mouvement, si la force qui retient tire à l'opposite, l'équilibre se fera lorsqu'elle sera égale à la force qui tire au contraire, et qu'ainsi, la puissance en D tirant à l'opposite, l'effet de votre principe s'en ensuivra.

Mais je réponds que votre réponse seroit bonne, si la puissance qui est en D étoit divisée et placée aux points B et C, et qu'elle tirât au contraire par les mêmes lignes que les forces, que vous supposez en C et B, meuvent. Mais cela n'étant pas, excusez mon incrédulité si elle ne se rend pas à vos raisons, lesquelles je souhaiterois plus fortes pour pouvoir librement me dédire de tout ce que j'ai fait sur ce sujet, vous protestant que jamais homme n'a été plus docile que moi et que, lorsque je reconnoîtrai mes fautes, je les publierai le premier avec toute franchise.

2. J'ai été bien aise de voir votre remarque sur la conchoïde [1], et vous prie de m'en donner la démonstration et vous souvenir que, lorsque je vous écrivis sur ce sujet, je le fis en doutant et sans examiner l'écrit que je transcrivis d'un livre où je l'avois mis il y avoit

[1] *Voir* Lettre XIV, 8.

quatre ans. La construction pourtant convient au problème et au point même de votre proposition, si elle est vraie, ce que j'attends que vous me confirmiez.

Je vous prie aussi me faire savoir votre sentiment sur les autres propositions que je vous ai envoyées et votre réponse sur les autres points de ma dernière Lettre (1) et me croire toujours etc.

XVIII.

FERMAT A ROBERVAL.

MARDI 16 DÉCEMBRE 1636.

(*Va*, p. 148-151.)

MONSIEUR,

1. Je viens de recevoir votre Lettre du 29 novembre (2), pour réponse à laquelle je vous dirai que, de la méthode que vous avez trouvée pour donner la somme des quarrécubes et quarréquarrés, je ne vois point qu'on en puisse tirer une règle générale pour l'invention de la somme *omnium potestatum in infinitum,* ce qui est requis à la solution de mon problème (3). Car vous dites seulement qu'il sera aisé de trouver les autres, après avoir vu celles dont vous baillez les exemples; mais je demande une méthode générale qui serve *ad omnes potestates,* comme Viète a trouvé celles des sections angulaires (4). Vous y songerez, s'il vous plaît, et j'en écrirai cependant l'invention et démonstration que vous verrez lorsqu'il vous plaira.

(1) Lettre XV.
(2) Cette Lettre, de Roberval à Fermat, est perdue.
(3) *Voir* Lettre XV, 3.
(4) Francisci Vietæ ad angulares sectiones theoremata καθολικώτερα demonstrata per Alexandrum Andersonum. — Pages 287 à 304 de l'édition des Elzevirs.

2. Pour ce qui est des nombres et de leurs parties aliquotes (¹), j'ai trouvé une méthode générale pour soudre toutes les questions par algèbre, de quoi j'ai fait dessein d'écrire un petit Traité. Je crois que vous aurez maintenant vu la construction des deux que j'ai envoyés au Père Mersenne; car il m'écrit qu'il vous les baillera. Toutes ces questions sont très difficiles, comme vous savez, et n'ont été traitées par personne.

3. J'ai été bien aise d'être confirmé par votre lettre en l'opinion que j'avois déjà conçue de M. de < Sainte-Croix >. Il est pourtant vrai qu'il doit avoir grande expérience dans les nombres, car, lui ayant par l'entremise du Père Mersenne proposé une question que personne de ceux à qui je l'avois proposée n'avoit encore pu soudre, il m'a envoyé d'abord les nombres qui satisfont à la question, sans pourtant expliquer sa construction. La question est (²) :

Invenire tria triangula rectangula numero, quorum areæ constituant tria latera trianguli rectanguli numero, singulæ nempe areæ singulis lateribus sint æquales.

Je vous avouerai que ce problème me donne beaucoup plus de peine qu'à M. de < Sainte-Croix >. Il est vrai que les nombres que j'ai trouvés sont différents des siens et que peut-être ai-je tenu un chemin plus difficile, comme vous savez que ces questions ont infinies solutions. Peut-être serez-vous de mon avis, si vous essayez de satisfaire à la proposition.

4. Vous verrez aussi mes spirales (³), desquelles la démonstration vous sera connue tout aussitôt (car elle est pareille à celle des nouvelles figures (⁴) que j'ai quarrées ou auxquelles j'ai trouvé des cônes

(¹) *Voir* Lettre XV, 4. — Les deux nombres envoyés au Père Mersenne sont les *amiables* 17296 et 18416 (*voir* IV_A et IV_B).
(²) *Voir* Observation XXIX sur Diophante (Tome I, p. 321).
(³) *Voir* Lettre XV, 6.
(⁴) *Voir* Lettre XIV, 4.

égaux), et vous m'avouerez que ces propositions n'illustrent pas peu la Géométrie.

Si M. de Beaugrand n'a pas encore trouvé la démonstration de ces questions, vous m'obligerez de lui en faire part.

5. Je lui ai écrit l'invention du centre de gravité de toutes ces nouvelles figures (¹) par une méthode particulière, qui ne suppose point la connoissance de la quadrature, ce qui vous semblera merveilleux jusques à ce que vous l'aurez vu. Il est vrai que je lui ai envoyé l'analyse seulement et non pas la composition que je vous éclaircirai une autre fois, parce qu'elle a ses difficultés et ne paroît pas d'abord par cette voie.

J'ai trouvé le centre de gravité de la parabole sans présupposer la quadrature, comme a fait Archimède, et ainsi on en peut tirer la quadrature par un simple corollaire.

6. Toutes ces propositions, ensemble celles des lieux plans, solides et *ad superficiem*, que j'ai achevées, et celles encore des parties aliquotes des nombres, dépendent de la méthode (²) dont M. Despagnet ne vous a pu faire voir qu'un seul cas, parce que, depuis que je n'ai eu l'honneur de le voir, je l'ai beaucoup étendue et changée.

7. Les tangentes des lignes courbes dépendent aussi de là, sur lequel sujet je vous proposerai de trouver une tangente à un point donné en la seconde conchoïde de Nicomède (³).

8. Au reste, je suis bien aise de ce que vous ayez trouvé la démon-

(¹) *Voir* Lettre XV, 5.
(²) *Voir* Lettre XIII, 3.
(³) *Voir* Lettre XVII, 2. — La seconde conchoïde de Nicomède (*Pappus*, éd. Hultsch, p. 244, l. 19) paraît correspondre à l'équation en coordonnées polaires : $\rho = \frac{a}{\cos\omega} - b$, en supposant $b < a$. (La troisième et la quatrième répondraient respectivement aux cas : $b = a$; $b > a$). Mais Fermat entend probablement ici la conchoïde du cercle. (*Comparez* Viète, *Supplementum Geometriæ*, édition des Elzevirs, page 240.)

stration, comme vous dites, de ce que, supposé qu'aux paraboles les segmens (1) de l'axe sont entre eux comme les parallélogrammes aux mêmes paraboles, il sera vrai aussi qu'étant tournées sur leurs axes, les centres des solides seront où l'axe est divisé en raison comme les cylindres aux solides (2).

Car, par la voie dont j'ai envoyé un exemple à M. de Beaugrand, et que je mettrai au long une autre fois, j'ai trouvé la démonstration de l'antécédent et, de celle du conséquent, que vous m'envoierez, s'il vous plait, j'en tirerai la proportion des solides paraboliques à leurs cônes, qu'il seroit malaisé de trouver autrement (3). Car vous trouverez bien la proportion de ceux qui viennent *post quadrata alternatim*, comme quarréquarrés, cubocubes etc., de quoi vous baillez l'exemple au premier; mais *in parabolis cubicis, quadratocubicis et sic alternis in infinitum, methodus qua usi sumus non dat proportionem conoideôn ad conos; ex nostra autem methodo, in omnibus omnino conoidibus invenimus centrum gravitatis : ergo, ex tua propositione, dabitur proportio eorum ad conos.*

Je l'attends donc avec impatience, puisqu'elle doit servir à cet usage; si ce n'est que vous ayez trouvé la proportion des conoïdes cubiques, quadratocubiques, etc. à leurs cônes, ce que votre Lettre semble marquer, auquel cas je vous supplie m'envoyer lesdites proportions.

Ce n'est pas que je doute de la vérité de votre proposition; mais permettez-moi de vous dire que je me suis défié que vous en eussiez trouvé la démonstration et que j'ai cru seulement que vous en avez fait l'expérience aux conoïdes paraboliques des quarréquarrés, cubo-

(1) C'est-à-dire que le centre de gravité de l'aire $z = \int_0^x y\,dx$ de la parabole $y^m = px$ divise l'abscisse x dans le rapport $m - 1$ à m.

(2) C'est-à-dire que le centre de gravité du solide $z = \int_0^x y^2\,dx$ engendré par la parabole $y^m = px$ divise l'abscisse x dans le rapport $m - 2$ à m.

(3) D'après ce passage, Fermat n'aurait alors possédé la quadrature $\int x^{\frac{2}{m}}\,dx$ que dans le cas où m est pair.

cubes etc. *alternis*. Mais la connoissance que j'ai de votre savoir fait que j'espère que vous me détromperez.

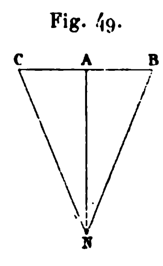
9. Pour ce qui est de la proportion (¹) du solide qui se fait sur un diamètre de la parabole parallèle à l'axe, ma construction est différente de la vôtre : il seroit inutile de l'ajouter, puisqu'elles concluent toutes deux.

10. Je me trouve obligé d'ajouter un mot touchant votre proposition méchanique (²), parce que le Père Mersenne m'écrit qu'enfin j'ai acquiescé à votre opinion, ce que pourtant je ne saurois faire par les raisons que vous allez voir, et vous puis assurer que jamais je ne fus mieux confirmé en la proposition de mon second levier (³) que je le suis maintenant, car, pour celle du premier, il la faut établir par de nouveaux principes, puisque vous avez nié ceux que j'estimois si clairs.

Si votre principe, duquel je vous ai déjà écrit par ma dernière Lettre (⁴), est vrai, il s'ensuit manifestement qu'un même corps approchant du centre de la terre changera son poids.

In secunda figura (fig. 49) *sit vectis* CAB, *cujus medium* A *cum centro terræ* N *per rectam* AN, *ad vectem perpendicularem, jungatur. In*

Fig. 49.



punctis C *et* B *pondera* C *et* B *æqualia constituantur et similia, quæ ad centrum per rectas* CN, BN *annuant.*

(¹) Proportion au cylindre ou au cône de même base et même hauteur, c'est-à-dire cubature.
(²) *Voir* Pièce XVI.
(³) *Voir* Pièce V, 2 et 5.
(⁴) *Voir* Lettre XVII, 1.

Si rectæ NC, NB *essent ad vectem perpendiculares, potentia in* A, *æqualis duobus ponderibus* B *et* C, *ex tuo principio detineret vectem. Sed, quum angulos* NCA, NBA *acutos efficiant, aut eadem aut minor aut major potentia requiretur in* A *ad æquilibrium.*

Si eadem potentia facit æquilibrium, verum erit principium quo in præcedenti ad te epistola usi sumus : quod si fatearis, statim vectem nostrum demonstrabimus.

Si major aut minor potentia æquilibrium constituit, ergo, in primo casu, quò minuentur magis anguli rectarum CN, BN *cum vecte, eò major requiretur ad æquilibrium potentia; in secundo casu, minor. Supra punctum* A *idem vectis, in eadem directionis linea, similiter ponatur, ut in figura; minuentur* (¹) *anguli linearum* CN, BN, *ut patet : variabit igitur potentia æquilibrii in* A *constituta, ideoque pondus ex gravibus* B *et* C *compositum, pro diversa a terræ centro distantia, erit etiam diversum.*

Primam partem dilemmatis quominus fatearis, impedit tua propositio : quippe, hoc dato, corrueret. Fatearis igitur necesse est, aut potentiam in A *variare pro diversitate angulorum, aut eamdem semper esse in omni angulorum acutorum positione, sed tamen inæqualem potentiæ quæ detinet potentias ad vectem perpendiculares.*

Utrum libet concesseris, manifestissimâ demonstratione detegitur paralogismus, quem tuæ demonstrationi irrepsisse nec veritas quam quærimus patitur dissimulare, nec tu ipse poteris fortasse diffiteri.

11. *In prima figura* (fig. 50), *quæ est quarta tuæ propositionis* (²), *his verbis ita construis.*

« Soit le centre de la balance A etc. (*voir* page 79, ligne 10 à page 80, ligne 4).... équilibré avec la puissance E sur le bras AC. »

Hic vertitur cardo tuæ demonstrationis.

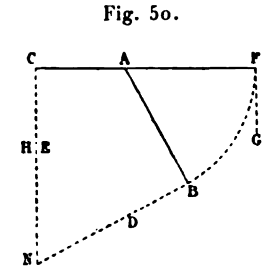
Et primò, si dixeris in omni angulorum acutorum positione eamdem

(¹) Le texte semble corrompu, mais ne peut être rétabli sûrement, la figure originale faisant défaut. Si la droite CB est tracée au-dessus du point A (*supra*), les angles C et B augmentent (*augebuntur*) au lieu de diminuer. Avec *minuentur*, il faudrait *infra*, qui est la leçon la plus probable au lieu de *supra*, à moins que la figure ne fût retournée.

(²) *Comparez* en effet la *fig.* 42, qui est la quatrième de la Lettre XIV.

semper potentiam requiri ad æquilibrium, statim demonstrabo meam de vecte propositionem; fatearis igitur necesse est, variare potentiam prout anguli variant.

Fig. 50.



His positis, esto, si placet, in exposita figura centrum terræ N *in quod rectæ* CE, BD *dirigantur, et sint in punctis* E *et* D *pondera seu gravia in proportione data, quod quidem liberum esse tua innuit constructio.*

Imo huc tantum abs te tenditur ut, per potentias imaginarias ab omnibus omnino partibus παραλλήλως *moventes, inveniatur proportio ponderum in vecte quiescente : aliter quippe, quum hujusmodi potentiæ nullibi in rerum natura reperiantur, inutiles prorsus essent.*

In punctis H *et* G *construis potentias ponderibus* E *et* D *æquales, quæ ab omnibus ipsarum partibus* παραλλήλως *moveant. Potentiam deinde* H *potentiæ* E *æqualiter movere, concludis per primum tuorum axiomatum, quia nempe trahet* H *potentia per punctum* C *et rectam* HC *perpendicularem vecti; trahet etiam pondus* E *per eamdem rectam vecti perpendicularem : quum igitur æquales potentiæ per eamdem rectam et eumdem angulum moveant et circa eamdem a vectis centro distantiam, pondus* E *et imaginaria* H *potentia æqualiter trahunt.*

Id, verisimile quum sit, veritatem intimam quærentibus non potest non videri falsissimum. Pondus in E *sit sphæricum, verbi gratia; omnes omnino ipsius partes ad centrum* N *tendunt per rectas in eodem* N *centro concurrentes et vectem* AC, *si continuentur, ad angulos acutos secantes : ergo potentiæ, abs* C *utrimque æqualiter remotæ, intelligentur vectem ad angulos acutos suis motibus secantes. Contra, quum partes omnes potentiæ* H παραλλήλως *moveant, intelligentur potentiæ, abs* C *utrimque æqualiter remotæ, ad angulos rectos vectem suis motibus secantes.*

Quum igitur partes omnes potentiæ H *simul sumptæ æquentur partibus omnibus potentiæ seu ponderis* E *simul sumptis* (*tota enim potentia* H *toti ponderi* E *æquatur*), *patet, ex jam traditis, potentiarum* H, E *in punctis* H *et* E *inæqualem esse motum; quod igitur de potentia* H *concludit demonstratio, perperam ad pondus* E *porrigit.*

12. S'il me restoit du temps ou du papier, j'ajouterois, suivant votre desir, la démonstration des cônes isopérimètres (¹). Ce sera une autre fois, me réservant encore de vous écrire quelque chose de plus recherché sur les Méchaniques, à la charge que vous m'obligerez de croire que je n'aurois garde de m'opiniâtrer après une proposition, si je ne la croyois véritable, et que je la quitterai un moment après que de nouvelles raisons l'emporteront sur les miennes.

Je suis etc.

(¹) *Voir* Lettres XIV, 11 et XV, 8.

ANNÉE 1637.

XIX.

FERMAT A ROBERVAL.

< FÉVRIER 1637 >

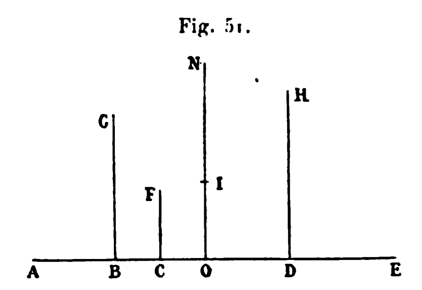
(*Va*, p. 151-152.)

MONSIEUR,

1. Je trouve assez de loisir pour vous envoyer encore la construction du lieu plan : *Si a quotcumque etc.* ([1]), que je tiens une des plus belles propositions de la Géométrie, et je crois que vous serez de mon avis.

Sint data quotlibet puncta, quinque verbi gratia, A, G, F, H, E (fig. 51)

Fig. 51.



(nam propositio est generalis), *quæritur circulus ad cujus circumferentiam in quolibet puncto inflectendo rectas a datis punctis, quadrata omnium sint æqualia spatio dato.*

([1]) *Voir* Tome I, p. 37, la proposition V du Livre II des *Lieux plans d'Apollonius*. — Cp. Lettre XIII, 7. — La présente semble n'être qu'un fragment d'une Lettre perdue.

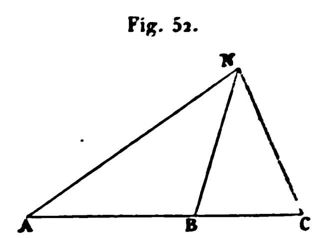
Jungantur puncta quævis A et E per rectam AE, in quam ab aliis punctis datis cadant perpendiculares GB, HD, FC. Omnium rectarum, punctis datis vel occursu perpendicularium et puncto A terminatarum, sumatur pars conditionaria, quintans, verbi gratia, in hac specie; quintans ergo rectarum AB, AC, AD, AE simul sumptarum esto AO, et a puncto O excitetur perpendicularis infinita ON, a qua resecetur OI pars conditionaria (quintans nempe pro numero punctorum datorum) perpendicularium GB, FC, HD, et intelligantur jungi rectæ AI, GI, FI, HI, EI. Quadrata istarum quinque erunt minora spatio dato : demantur igitur a spatio dato et supersit, verbi gratia, Z planum, cujus quintans (pars nempe conditionaria) sumatur et in quadratum M redigatur. Circulus, centro I, intervallo M descriptus satisfaciet proposito : hoc est, quodcumque punctum sumpseris in ipsius circumferentia, rectarum a datis punctis ad illud punctum ductarum quadrata erunt æqualia spatio dato.

Adderem demonstrationem, sed longa sane est, et malim vestrum amborum sollicitare genium ad eam inveniendam.

2. Non solum autem has propositiones, sed omnes omnino *de locis planis* absolvi, imo locos quamplurimos adinveni, de quibus nihil scripserat Apollonius, qui tamen sunt pulcherrimi, verbi gratia [1] :

Datis tribus punctis in recta A, B, C (fig. 52), *invenire circuli circum-*

Fig. 52.



ferentiam, in qua sumendo quodlibet punctum, ut N, *quadrata* AN, NB *superent quadratum* NC *spatio dato.*

[1] *Voir* Tome I, p. 31, la seconde addition de Fermat à la proposition I du Livre II des *Lieux plans*.

De *locis solidis* et *ad superficiem* multa quoque jam sunt detecta.

Casus loci plani superioris, non addo, nam patebunt statim. — *Si puncta data sint tantum tria et constituant triangulum, centrum circuli localis erit centrum gravitatis illius trianguli*, et hæc propositio singularis satis est mira.

3. Sed hic non moror. Propositionem universalissimam ita constituo et jam construxi (¹) :

Si a datis quotlibet punctis inflectantur rectæ, et exponantur omnium species in data proportione crescentes aut deficientes, erunt species ita auctæ aut deminutæ dato spatio æquales.

Exemplum : Sint data tria puncta in superiori figura A, B, C, et quærendus circulus in cujus circumferentia sumendo quodlibet punctum, ut N, quadrati NA dimidium, verbi gratia, quadrati BN duplum et quadrati CN triplum simul juncta conficiunt spatium datum, et demonstratio ad quamlibet proportionem et quotlibet puncta porrigenda.

Hanc propositionem, pulcherrimam sane, videtur non vidisse Apollonius.

XX.

ROBERVAL A FERMAT.

SAMEDI 4 AVRIL 1637.

(*Va*, p. 152-153.)

MONSIEUR,

1. Quoique j'eusse reçu dès lundi dernier votre démonstration du lieu plan (²), néanmoins mes occupations, tant publiques que parti-

(¹) Généralisation de la proposition V du Livre II des *Lieux plans*.

(²) *Voir* Lettre XIX, 1. — Roberval, dans une Lettre perdue, avait demandé la démonstration de l'énoncé donné par Fermat.

culières, ne me permirent point de la considérer jusques à jeudi que je la présentai de votre part à l'assemblée de nos mathématiciens, qui étoit, ce jour-là, chez M. de Montholon, conseiller, où elle fut reçue, considérée, admirée avec étonnement des esprits, et votre nom élevé jusques au ciel, avec charge particulière à moi de vous remercier au nom de la Compagnie et vous prier de m'envoyer tout d'une main la composition du lieu solide ([1]) avec une brève démonstration, afin de faire imprimer les deux ou sous votre nom ou sans nom, comme vous le voudrez; en quoi nous aurons le soin d'étendre plus au long ce qui semblera trop concis pour le public.

Cependant, il y eut débat à qui auroit votre écrit pour en tirer copie, chacun m'enviant le bonheur de la communication que j'ai avec vous; mais M. le président Pascal, à qui le premier je l'avois mis entre les mains et qui l'avoit lu à la Compagnie, donna arrêt en sa faveur, se fondant sur la maxime : *qui tenet, teneat,* et pour faire droit aux parties intéressées, se chargea lui-même de leur en fournir copie, ordonnant que puis après l'original me seroit remis entre les mains.

Je leur avois dès auparavant communiqué la construction et un nommé M. Le Pailleur avoit trouvé la démonstration particulière pour trois et pour quatre points, si différente de la vôtre que c'est une chose étrange. Il y avoit apparence qu'avec le temps il eût trouvé une démonstration générale; mais il confesse que cette recherche le tuoit et qu'il vous a une particulière obligation de l'avoir délivré d'une peine presque insupportable.

2. Pour moi, je ne me puis promettre aucun loisir que trois mois ne soient passés, pour être délivré de mes leçons publiques et, quand j'aurois ce loisir, je ne serois pas assuré de trouver le lieu solide, lequel je prévois très difficile. C'est pourquoi, dès maintenant, je vous ferai, si vous voulez, une ample déclaration de mon impuissance, afin que, sans me tenter plus longtemps, et qu'ayant égard aux prières d'une telle Compagnie que celle dont je vous parle, vous nous fassiez

([1]) Le lieu solide *ad tres et quatuor lineas. Voir* Lettre XXI, 2.

part de votre invention, qui est telle que le grand géomètre (¹) des siècles passés se glorifioit particulièrement d'y avoir ajouté la perfection, en ayant reçu l'invention de ceux qui l'avoient précédé. Jugez combien vous avez occasion de vous glorifier de l'avoir trouvée en un temps auquel elle étoit en même état que si elle n'avoit jamais été connue.

3. Il m'est enfin paru quelque lumière pour le centre de gravité des paraboles, en considérant les centres des parallélogrammes circonscrits comme s'ils étoient tous posés sur une même base, différant seulement en hauteur. Mais, comme ces lumières me viennent au matin en me levant et qu'il faut du loisir pour les éclaircir, je ne me puis pas promettre d'en venir à bout si tôt. Si vous me délivrez de cette peine, je vous en aurai l'obligation entière.

Je suis etc.

XXI.

FERMAT A ROBERVAL (²).

LUNDI 20 AVRIL 1637.

(*Va*, p. 153-154.)

Monsieur,

1. Je ne pus pas vous écrire par le dernier courrier, à cause des occupations auxquelles je me trouvai engagé; je prends maintenant la plume pour vous témoigner que je suis beaucoup obligé à ces Messieurs à qui vous avez fait voir ma proposition, auxquels vous assurerez, s'il vous plaît, que j'estime beaucoup plus leur approbation que mon ouvrage. Leur savoir est si connu que je ne puis m'empêcher d'être glo-

(¹) Apollonius, préface du Livre I des *Coniques* (page 8 de l'édition Halley).

(²) Réponse à la Lettre précédente.

rieux d'avoir écrit et inventé quelque chose qui leur plaise. Je ne prétends pas par là vous exclure du nombre; au contraire, les marques de votre savoir m'étant plus particulièrement connues, je juge par là quels doivent être ceux qui confèrent avec vous.

2. Au reste, je vous eusse envoyé les lieux solides *ad tres et quatuor lineas*, n'étoit que j'ai cru que M. de Beaugrand ne fera pas difficulté de bailler à M. de Carcavi le lieu *ad tres lineas*, que je lui envoyai, il y a longtemps, avec la démonstration (1). Dès que vous aurez celui-là, je vous envoierai l'autre. Si j'avois retenu copie de celui *ad tres lineas*, je n'eusse pas fait difficulté de vous l'envoyer; mais, ne l'ayant plus, j'ai voulu ménager la peine qu'il m'eût fallu prendre à le refaire, à laquelle je me porterai pourtant, si M. de Beaugrand ne le baille pas.

3. Vous verrez entre les mains de M. de Carcavi les deux Livres *De locis planis* (2), que j'avois promis depuis longtemps à M. de Beaugrand et que j'ai à dessein envoyé un courrier plus tôt que je ne lui avois fait espérer, afin que vous puissiez cependant les voir. Vous m'obligerez de m'en écrire avec franchise votre sentiment; je ne doute pas que la chose n'eût pu se polir davantage, mais je suis le plus paresseux de tous les hommes.

Je serai bien aise que vous m'écriviez aussi quelles de ces propositions vous étoient connues et quelles non, et en cas que vous en ayez vu quelqu'une, principalement du deuxième Livre, si elles étoient pareilles à celles que vous verrez. Car il y a huit ans que le deuxième Livre est écrit et en ce temps j'en baillai deux copies, l'une à M. Despagnet, conseiller au parlement de Bordeaux, et l'autre à M. de ...., si bien que peut-être quelqu'une de ces propositions aura été divulguée. Peut-être vous-même ou quelqu'autre de ceux de votre Compagnie en ont fait une partie.

Éclaircissez-moi de tout au vrai et vous m'obligerez beaucoup et sur-

(1) C'est la Pièce publiée Tome I, pages 87-89. La démonstration du lieu *ad quatuor lineas* est perdue.

(2) *Voir* Tome I, pages 3 à 51.

tout que votre jugement suive toutes ces propositions, s'il vous plaît; je l'attends pour réponse à celle-ci.

4. Au reste, quoi qu'on juge digne d'impression de moi, je ne veux pas que mon nom y paroisse.

Je me réserve à vous entretenir plus amplement une autre fois; cependant vous saurez qu'outre les lieux plans et solides qui sont dans Pappus, j'en ai trouvé grande quantité de très beaux et dignes de remarque, que je n'ai pourtant osé mêler avec ceux d'Apollonius. J'en ai plus de cent propositions très belles et particulièrement des lieux solides et *ad superficiem*, mais le loisir me manque.

Je n'ai pas voulu faire le grammairien en expliquant au menu le texte de Pappus; il suffit que j'aie pris son sens, comme je crois que vous m'avouerez.

J'attends votre réponse et suis etc.

XXII.

FERMAT A MERSENNE.

< SEPTEMBRE 1637 >

(D, III, 37.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Vous me demandez mon jugement sur le Traité de Dioptrique de M. Descartes [1]; il est vrai que le peu de temps que M. de Beaugrand

[1] Le premier Volume publié par Descartes : — *Discours | de la Methode | pour bien conduire sa raison, et chercher | la verité dans les sciences. | Plus | la Dioptrique | les Meteores | et | la Geometrie | qui sont des essais de cette Methode. — A Leyde | De l'Imprimerie de Ian Maire* | CIƆ.IƆ.CXXXVII. *Auec Priuilege.* — ne parvint en France et ne fut distribué (par Mersenne) que vers la fin de 1637. Mais, avant l'achèvement de l'impression et à l'appui de la demande du privilège, qui fut accordé le 4 mai, Descartes avait envoyé un exemplaire au Minime, qui le communiqua par parties à différentes personnes. C'est ainsi qu'il prit l'avis de Fermat sur la *Dioptrique*, qui paraît cependant avoir

m'a donné pour le parcourir semble me dispenser de l'obligation de vous satisfaire exactement et par le menu, outre que, la matière étant de soi très subtile et très épineuse, je n'ose pas espérer que des pensées informes et non encore bien digérées puissent vous donner une grande satisfaction. Mais d'ailleurs, quand je considère que la recherche de la vérité est toujours louable, et que nous trouvons souvent à tâtons et parmi les ténèbres ce que nous cherchons, j'ai cru que vous ne trouveriez pas mauvais que je tâchasse à vous débrouiller une mienne imagination sur ce sujet, laquelle, étant encore obscure et embarrassée, j'éclaircirai peut-être davantage une autre fois, si mes fondemens sont approuvés, ou si je ne change pas moi-même d'avis.

2. La connoissance des réfractions a toujours été recherchée, mais inutilement. Alhasen et Vitellion [1] y ont travaillé sans avancer beaucoup; et ceux qui sont venus depuis ont très bien remarqué que tout se réduisoit à établir une certaine proportion, par le moyen de laquelle, une réfraction étant connue, on pût aisément trouver toutes les autres; de sorte que tous les fondemens de la Dioptrique doivent consister en ce point, c'est-à-dire en la convenance et au rapport qu'une réfraction connue a à toutes les autres.

Cela supposé, il a été nécessaire que ceux qui ont voulu établir les principes de la Dioptrique aient cherché cette convenance et ce rapport

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Maurolic, abbé de Messine, en son Traité posthume *De lumine et umbra* (¹), a soutenu que les angles qu'on appelle d'incidence sont proportionaux à ceux qu'on nomme de réfraction. Si cette proposition étoit vraie, elle suffiroit pour nous marquer les vraies figures que doivent avoir les corps diaphanes qui produisent tant de merveilles; mais, pour ce qu'elle n'a pas été bien démontrée par Maurolic, et que l'expérience même semble la convaincre de faux, il en est resté assez à M. Descartes pour exercer son esprit, et pour nous découvrir de nouvelles lumières dans ces corps, qui, pour en être seuls capables, n'ont pas laissé de produire jusques à présent de grandes obscurités.

Son Traité de la Dioptrique est divisé en plusieurs discours, desquels les principaux sont, ce me semble, les deux premiers, qui parlent de la lumière et de la réfraction, pource qu'ils contiennent les fondemens de la Science, dont on voit ensuite les belles conclusions et conséquences qu'il en tire.

3. Voici à peu près son raisonnement (²) : La lumière n'est autre chose que l'inclination que les corps lumineux ont à se mouvoir; or, cette inclination au mouvement doit probablement suivre les mêmes lois que le mouvement même; et partant, nous pouvons régler les effets de la lumière par la connoissance que nous pouvons avoir de ceux du mouvement.

Il considère ensuite le mouvement d'une balle dans la réflexion et dans la réfraction, et pour ce qu'il seroit inutile et ennuyeux de copier ici tout son discours, je me contenterai de vous marquer simplement les observations que j'y ai faites.

4. Je doute premièrement, et avec raison, ce me semble, si l'inclination au mouvement doit suivre les lois du mouvement même, puis-

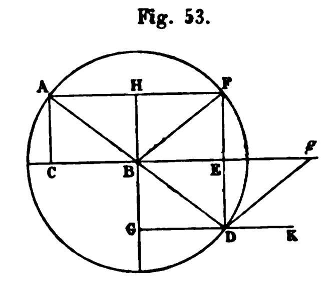
(¹) Abbatis Francisci Maurolyci Messanensis. Photismi de lumine, et umbra ad perspectivam, et radiorum incidentiam facientes. — Diaphanorum partes, seu Libri tres : in quorum primo de perspicuis corporibus, in secundo de Iride, in tertio de organi visualis structura, et conspiciliorum formis agitur. — Problemata ad perspectivam, et Iridem pertinentia. — Omnia nunc primum in lucem edita. — Neapoli, ex Typographia Tarquinii Longi. M.DC.XL. Superiorum permissu.

(²) Page 8 de l'édition originale du Traité de Descartes.

qu'il y a autant de différence de l'un à l'autre que de la puissance à l'acte; outre qu'en ce sujet, il semble qu'il y a une particulière disconvenance, en ce que le mouvement d'une balle est plus ou moins violent, à mesure qu'elle est poussée par des forces différentes, là où la lumière pénètre en un instant les corps diaphanes et semble n'avoir rien de successif. Mais la Géométrie ne se mêle point d'approfondir davantage les matières de la Physique.

5. En la figure (*fig.* 53) par laquelle il explique la raison de la réflexion, page 15 de la Dioptrique ([1]), il dit que la détermination à se

Fig. 53.



mouvoir vers quelque côté peut, aussi bien que le mouvement et généralement que toute autre quantité, être divisée en toutes les parties desquelles on peut imaginer qu'elle est composée, et qu'on peut aisément imaginer que celle de la balle qui se meut d'A vers B, est composée de deux autres, dont l'une la fait descendre de la ligne AF vers la ligne CE et l'autre en même temps la fait aller de la gauche AC vers la droite FE, en sorte que ces deux, jointes ensemble, la conduisent jusques à B, suivant la ligne droite AB.

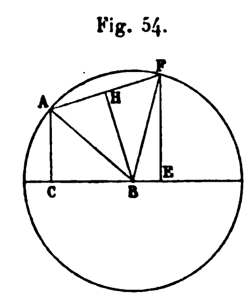
Cela posé, il en tire la conséquence de l'égalité des angles d'incidence et de réflexion, qui est le fondement de la Catoptrique.

Pour moi, je ne saurois admettre son raisonnement pour une preuve et démonstration légitime. Car, par exemple, en la figure ci-jointe (*fig.* 54), en laquelle AF n'est plus parallèle à CB, et où l'angle CAF

([1]) Nous reproduisons la figure donnée par Clerselier dans son édition des *Lettres de Descartes*, tome III, page 171. Dans l'édition originale de la *Dioptrique*, les lignes BG, GDK, D*g* ne sont pas tracées.

est obtus, pourquoi ne pouvons-nous pas imaginer que la détermination de la balle qui se meut d'A vers B est composée de deux autres, dont l'une la fait descendre de la ligne AF vers la ligne CE, et l'autre la fait avancer vers AF? Car il est vrai de dire qu'à mesure que la balle descend dans la ligne AB, elle s'avance vers AF, et que cet avancement

Fig. 54.



doit être mesuré par les perpendiculaires tirées, des divers points qui peuvent être pris entre A et B, sur la ligne AF. Et ceci pourtant se doit entendre lorsque AF fait un angle aigu avec AB; autrement, s'il étoit droit ou obtus, la balle n'avanceroit pas vers AF, comme il est aisé de comprendre.

Cela supposé, par le même raisonnement de l'auteur, nous conclurons que le corps poli CE n'empêche que le premier mouvement, ne lui étant opposé qu'en ce sens-là; de sorte que, ne donnant point d'empêchement au second, la perpendiculaire BH étant tirée, et HF faite égale à HA, il s'ensuit que la balle doit réfléchir au point F, et ainsi l'angle FBE sera plus grand que ABC.

Il est donc évident que, de toutes les divisions de la détermination au mouvement, qui sont infinies, l'auteur n'a pris que celle qui lui peut servir pour sa conclusion; et partant il a accommodé son *medium* à sa conclusion, et nous en savons aussi peu qu'auparavant. Et certes, il semble qu'une division imaginaire, qu'on peut diversifier en une infinité de façons, ne peut jamais être la cause d'un effet réel.

Nous pouvons, par un même raisonnement, refuter la preuve de ses fondemens de Dioptrique, puisqu'ils sont établis sur un pareil discours.

6. Voilà mon sentiment sur ces nouvelles propositions, dont les conséquences qu'il en tire, lorsqu'il traite de la figure que doivent avoir les lunettes, sont si belles, que je souhaiterois que les fondemens sur lesquels elles sont établies fussent mieux prouvés qu'ils ne sont pas : mais j'appréhende que la vérité leur manque aussi bien que la preuve.

J'avois fait dessein de vous discourir ensuite de mes pensées sur ce sujet; mais, outre que je ne puis encore me satisfaire moi-même exactement, j'attendrai toutes les expériences que vous avez faites ou que vous ferez à ma prière, sur les diverses proportions des angles d'inclination et ceux de réfraction. Vous m'obligerez beaucoup de m'en faire part au plus tôt, et je vous promets, en revanche, de vous dire de nouvelles choses sur cette matière.

Tout ce que je viens de vous dire n'empêche pas que je n'estime beaucoup l'esprit et l'invention de l'auteur; mais il faut de commune main chercher la vérité, que je crois nous être encore cachée sur ce sujet.

7. Vous m'avez encore envoyé deux Discours (¹), l'un contre M. de Beaugrand, et l'autre de M. Desargues. J'avois vu déjà le second, qui est agréable et fait de bon esprit. Pour le premier, il ne peut pas être mauvais, si nous en retranchons les paroles d'aigreur; car la cause de M. de Beaugrand est tout-à-fait déplorée. Je lui écrivis les mêmes raisons de votre imprimé à lui-même, dès qu'il m'eut envoyé son Livre.

(¹) Le Discours de Desargues doit être son premier opuscule sur la perspective : *Exemple de l'une des manières universelles du S. G. D. L., touchant la pratique de la perspective sans emploier aucun tiers point, de distance ny d'autre nature qui soit hors du champ de l'ouvrage. A Paris, en May* 1636, *avec Privilège* (Bibl. Nat. imprimés V 122, Inventaire V 1527), reproduit, sous un titre inexact, pages 53-84 du premier Volume des *OEuvres de Desargues* (éd. Poudra, Paris, Leiber, 1864).

Le Discours contre Beaugrand est l'Ouvrage : *Esclaircissement d'une partie des Paralogismes ou fautes contre les loix du raisonnement et de la demonstration que Monsieur de Beaugrand a commis en sa pretendue Demonstration de la première partie de la quatriesme proposition de son Liure intitulé Geostatique. Adressé au mesme Monsieur de Beaugrand. Par Guy de la Brosse, Escuier Conseiller et Medecin ordinaire du Roy, et Intendant du Iardin Royal des Plantes Medecinales de Paris. — A Paris. Chez Iacques Dugast, rue S. Jean de Beauuais. à l'Olivier de Robert Estienne et en sa boutique dans la court du Palais, place du Change.* M.DC.XXXVII (Bibl. Nat. imprimés V [illegible], Inventaire V 1538).

J'attends la faveur que vous me faites espérer de voir par votre moyen les autres Livres de M. Descartes et le Livre de Galilée *De motu* (¹).

Je suis, mon Révérend Père, votre très humble serviteur,

FERMAT.

XXIII.

DESCARTES A MERSENNE POUR FERMAT (²).

< OCTOBRE 1637 >

(D, III, 39.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Vous me mandez qu'un de vos amis, qui a vu la Dioptrique, y

(¹) Il s'agit de l'Ouvrage : *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla Mecanica e i movimentali locali, del Signor Galileo Galilei, filosofo e matematico primario del serenissimo Grand Duca di Toscana. — Con una Appendice del centro di gravità di alcuni solidi.* — qui était alors sous presse à Leyde, chez les Elzevirs, et qui ne parut que l'année suivante, en 1638.

(²) Réponse à la Lettre précédente. La date indiquée dans les annotations manuscrites de l'exemplaire des *Lettres de Descartes* de la Bibliothèque de l'Institut, qui a été utilisé par Cousin pour son édition, est celle du 3 décembre 1637. Mais cette réponse de Descartes fut adressée par lui à Mersenne en même temps que sa Lettre (Clerselier, III, 38), qui commence ainsi :

« Mon Révérend Père, j'ai été bien aise de voir la lettre de M. de Fermat et je vous » en remercie; mais le défaut qu'il trouve en ma démonstration n'est qu'imaginaire et » montre assez qu'il n'a regardé mon Traité que de travers. Je réponds à son objection » dans un papier séparé, afin que vous lui puissiez envoyer, si bon vous semble, et si » vous avez envie par charité de le délivrer de la peine qu'il prend de rêver encore sur » cette matière.... »

Or, dans la même Lettre, Descartes dit avoir reçu « ces jours passés » quelques objections de *Fromondus*, auxquelles il a répondu dès le lendemain. Comme la lettre de Libert Froidmont est datée du 13 septembre 1637 et qu'elle fut transmise à Descartes le 15 septembre par *Plempius* (Domela Nieuwenhuis, *Commentatio de R. Cartesii commercio cum philosophis belgicis*, Louvain, 1828, p. 95), il faut adopter pour les réponses de Descartes à Plempius et à Fromondus (éd. Clerselier, II, 7 et 8) la date du 3 octobre donnée par l'édition latine d'Amsterdam des Lettres de Descartes, et non pas celle du 27 novembre supposée par l'annotateur anonyme de l'exemplaire de l'Institut.

Dès lors, notre Lettre XXIII doit avoir été écrite du 5 au 12 octobre 1637.

trouve quelque chose à objecter, et premièrement qu'il doute *si l'inclination au mouvement doit suivre les mêmes lois que le mouvement, puisqu'il y a autant de différence de l'un à l'autre que de la puissance à l'acte* (¹).

Mais je me persuade qu'il a formé ce doute sur ce qu'il s'est imaginé que j'en doutois moi-même, et qu'à cause que j'ai mis ces mots en la page 8, ligne 24 : « *car il est bien aisé à croire que l'inclination* (²) *à se mouvoir doit suivre en ceci les mêmes lois que le mouvement* », il a pensé que, disant qu'une chose est aisée à croire, je voulois dire qu'elle n'est que probable. En quoi il s'est fort éloigné de mon sentiment; car je répute presque pour faux tout ce qui n'est que vraisemblable, et quand je dis qu'une chose est aisée à croire, je ne veux pas dire qu'elle est probable seulement, mais qu'elle est si claire et si évidente, qu'il n'est pas besoin que je m'arrête à la démontrer; comme en effet on ne peut douter avec raison que les lois que suit le mouvement, qui est l'acte, comme il dit lui-même, ne s'observent aussi par l'inclination à se mouvoir, qui est la puissance de cet acte. Car, bien qu'il ne soit pas toujours vrai que ce qui a été en la puissance soit en l'acte, il est néanmoins du tout impossible qu'il y ait quelque chose en l'acte qui n'ait pas été en la puissance.

2. Pour ce qu'il dit ensuite (³), *qu'il semble y avoir ici une particulière disconvenance, en ce que le mouvement d'une balle est plus ou moins violent, à mesure qu'elle est poussée par des forces différentes, là où la lumière pénètre en un instant les corps diaphanes, et semble n'avoir rien de successif*, je ne comprends point son raisonnement.

Car il ne peut mettre cette disconvenance en ce que le mouvement d'une balle peut être plus ou moins violent, vu que l'action que je prends pour la lumière peut aussi être plus ou moins forte; ni non plus en ce que l'un est successif et l'autre non, car je pense avoir assez

(¹) *Voir* Lettre XXII, 4.
(²) Le texte de la Dioptrique porte : *l'action ou inclination.*
(³) *Voir* Lettre XXII, 4.

fait entendre, par la comparaison du bâton d'un aveugle, et par celle du vin qui descend dans une cuve, que, bien que l'inclination à se mouvoir se communique d'un lieu à l'autre en un instant, elle ne laisse pas de suivre le même chemin par où le mouvement successif se doit faire, qui est tout ce dont il est ici question.

3. Il ajoute après cela un discours qui me semble n'être rien moins qu'une démonstration (¹). Je ne veux pas répéter ici ses mots, pour ce que je ne doute point que vous n'en ayez gardé l'original; mais je dirai seulement que, de ce que j'ai écrit que la détermination à se mouvoir peut être divisée (j'entends divisée réellement, et non point par imagination) en toutes les parties dont on peut imaginer qu'elle est composée, il n'a eu aucune raison de conclure que la division de cette détermination, qui est faite par la superficie CBE (*fig.* 54), qui est une superficie réelle, à savoir celle du corps poli CBE, ne soit qu'imaginaire. Et il a fait un paralogisme très manifeste en ce que, supposant la ligne AF n'être pas parallèle à la superficie CBE, il a voulu qu'on pût, nonobstant cela, imaginer que cette ligne désignoit le côté auquel cette superficie n'est point du tout opposée, sans considérer que, comme il n'y a que les seules perpendiculaires, non sur cette AF tirée de travers par son imagination, mais sur CBE, qui marquent en quel sens cette superficie CBE est opposée au mouvement de la balle, aussi n'y a-t-il que les parallèles à cette même CBE qui marquent le sens auquel elle ne lui est point du tout opposée.

4. Mais, afin qu'on voie mieux la différence qui est entre nos deux raisonnemens, je les veux appliquer à une autre matière. J'argumente en cette sorte :

Premièrement, le triangle ABC (*fig.* 55) peut être divisé en toutes les parties dont on peut imaginer qu'il est composé. *Secondement*, or on peut aisément imaginer qu'il a été composé des quatre triangles égaux ADE, FED, EFB, DCF. *Troisièmement*, et ensuite il est aisé à

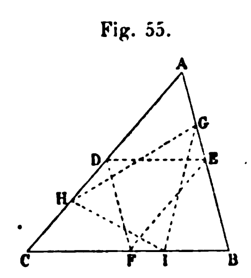
(¹) *Voir* Lettre XXII, 5.

entendre que les trois lignes DE, EF, FD marquent les endroits où ces quatre triangles doivent se joindre pour le composer. Donc, si on tire ces trois lignes, il sera réellement et véritablement divisé par elles en quatre triangles égaux.

Voici maintenant la façon dont il argumente, ou du moins dont il veut que j'aie argumenté :

Le triangle ABC peut être divisé en toutes les parties dont on peut imaginer qu'il est composé. Or on peut imaginer qu'il est composé des

Fig. 55.



quatre triangles inégaux AHG, IGH, HCI, IBG. Donc, si on tire les trois lignes DE, EF et FD, elles diviseront ce triangle en quatre autres qui seront inégaux.

Je m'assure que quiconque voudra entendre raison ne dira point que ces deux argumens soient semblables.

5. Mais, de quelque qualité que soient les objections qu'on voudra faire contre mes écrits, vous m'obligerez, s'il vous plaît, de me les envoyer toutes, et je ne manquerai pas d'y répondre, au moins si elles ou leurs auteurs en valent tant soit peu la peine, et s'ils trouvent bon que je les fasse imprimer lorsque j'en aurai ramassé pour remplir un juste volume. Car je n'aurois jamais fait si j'entreprenois de satisfaire en particulier à un chacun.

Je suis, etc.

XXIV.

FERMAT A MERSENNE (1).

< DÉCEMBRE 1637 >

(D. III, 40).

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. J'ai vu dans la Lettre de M. Descartes, que vous avez pris la peine de m'envoyer, des réponses succinctes qu'il fait aux objections que j'avois formées contre sa Dioptrique, auxquelles j'eusse plus tôt répondu si mes occupations nécessaires ne m'eussent empêché de le faire, de quoi M. de Carcavi sera mon garant. Je vous proteste d'abord que ce n'est point par envie ni par émulation que je continue cette petite dispute, mais seulement pour découvrir la vérité; de quoi j'estime que M. Descartes ne me saura pas mauvais gré, d'autant plus que je connois son mérite très éminent, et que je vous en fais ici une déclaration très expresse. J'ajouterai, auparavant que d'entrer en matière, que je ne désire pas que mon écrit soit exposé à un plus grand jour

(1) Le texte de cette Lettre a été revisé sur la copie faite à Vienne par Despeyrous d'après les originaux de Clerselier (Bibl. Nat. MS. français nouv. acq. 3280, fol. 29 à 34). Elle répond à la Lettre XXIII qui précède.

Sa date est fixée au 25 janvier 1638 par l'annotateur de l'exemplaire des *Lettres de Descartes* de la Bibliothèque de l'Institut (*Œuvres de D.*, éd. Cousin, VI, p. 381), et de fait Mersenne ne l'adressa à Descartes que le 12 février 1638. Mais il la lui avait annoncée dès la fin de décembre 1637, en même temps qu'il lui envoyait des écrits mathématiques de Fermat (*voir* ci-après Lettre XXV, 2e note). C'est, en effet, à la présente Pièce XXIV que se rapporte le passage suivant d'une Lettre de Descartes à Mersenne (éd. Clerselier, III, p. 429) à dater de janvier 1638 :

« Je n'ai pas tant de desir de voir la démonstration de M. de Fermat contre ce que j'ai écrit de la réfraction, que je vous veuille prier de me l'envoyer par la poste, mais, lorsqu'il se présentera commodité de me l'adresser par mer, avec quelques balles de marchandise, je ne serai pas marri de la voir, avec la Géostatique et le Livre de la Lumière de M. de la Chambre et tout ce qui sera de pareille étoffe; non que je ne fusse bien aise de voir promptement ce qu'écrivent les autres, pour ou contre mes opinions ou de leur invention, mais les ports de lettres sont excessifs. »

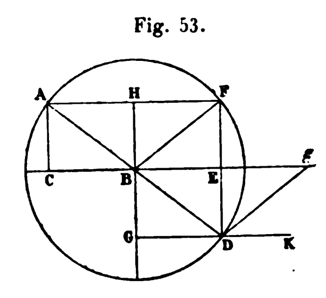
que celui que peut souffrir un entretien familier, de quoi je me confie à vous.

2. Je tranche en quatre mots notre dispute sur la réflexion, laquelle pourtant je pourrois faire durer davantage, et prouver que l'auteur a accommodé son *medium* à sa conclusion, de la vérité de laquelle il étoit auparavant certain; car, quand je lui nierois que sa division des déterminations au mouvement n'est pas celle qu'il faut prendre, puisque nous en avons d'infinies, je le réduirois à la preuve d'une proposition qui lui seroit très malaisée. Mais, puisque nous ne doutons pas que les réflexions ne se fassent à angles égaux, il est superflu de disputer de la preuve, puisque nous connoissons la vérité; et j'estime que je ferai mieux, sans marchander, de venir à la réfraction, qui sert de but à la Dioptrique.

3. Je reconnois, avec M. Descartes, que la force ou puissance mouvante est différente de la détermination, et, par conséquent, que la détermination peut changer sans que la force change, et au contraire.

L'exemple du premier cas se voit en la figure de la 15^e^ page de la Dioptrique, où la balle poussée du point A au point B (*fig.* 53) se dé-

Fig. 53.

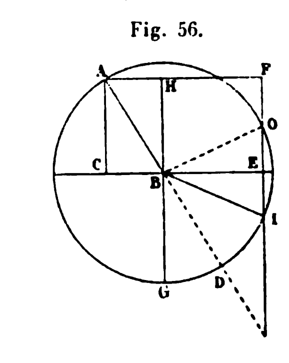


tourne au point F, de sorte que la détermination à se mouvoir dans la ligne AB change, sans que la force qui continue son mouvement soit diminuée ou changée.

Nous pouvons nous servir de la figure de la page 17 pour le second cas (*fig.* 56). Car, si nous imaginons que la balle soit poussée du point H jusques au point B, puis qu'elle tombe perpendiculairement

sur la toile CBE, il est évident qu'elle la traversera dans la ligne BG, et ainsi sa force mouvante s'affoiblira, et son mouvement sera retardé sans que la détermination change, puisqu'elle continue son mouvement dans la même ligne HBG.

Fig. 56.



4. Je reviens maintenant à la démonstration de la réfraction sur la même figure de la page 17.

« *Considérons* (¹) », dit l'auteur, « *que des deux parties, dont on peut imaginer que cette détermination est composée, il n'y a que celle qui faisoit tendre la balle de haut en bas qui puisse être changée en quelque façon par la rencontre de la toile, et que, pour celle qui la faisoit tendre vers la main droite, elle doit toujours demeurer la même qu'elle a été, à cause que cette toile ne lui est aucunement opposée en ce sens-là.* »

5. Je remarque d'abord que l'auteur ne s'est pas souvenu de la différence qu'il avoit établie entre la détermination et la force mouvante ou la vitesse du mouvement. Car il est bien vrai que la toile CBE affoiblit le mouvement de la balle, mais elle n'empêche pas qu'elle ne continue sa détermination de haut en bas, et, quoique ce soit plus lentement qu'auparavant, on ne peut pas dire que, parce que le mouvement de la balle est affoibli, la détermination qui la fait aller de haut en bas soit changée. Au contraire, sa détermination à se mouvoir dans la ligne BI est aussi bien composée, au sens de l'auteur, de celle qui la fait aller de haut en bas et de celle qui la fait aller de la gauche à la

(¹) Texte de la Dioptrique : *Et considérons aussi que etc.*

droite, comme la première détermination à se mouvoir dans la ligne AB.

6. Mais donnons que la détermination vers BG, ou de haut en bas, pour parler comme l'auteur, soit changée; nous en pouvons conclure que la détermination vers BE, ou de gauche à droite, est aussi changée. Car, si la détermination vers BG est changée, c'est pource qu'à comparaison du premier mouvement, la balle qui maintenant se détourne et prend le chemin de BI, avance moins à proportion vers BG que vers BE qu'elle ne faisoit auparavant; or, par ce que nous supposons qu'elle avance à proportion moins vers BG que vers BE qu'elle ne faisoit auparavant, nous pouvons aussi dire qu'elle avance à proportion davantage vers BE que vers BG qu'elle faisoit auparavant; si le premier nous fait comprendre que la détermination vers BG est changée, le second nous peut bien faire concevoir que la détermination vers BE est aussi changée, puisque le changement est aussi bien causé par l'augmentation que par la diminution.

7. Mais donnons encore que la détermination de haut en bas soit changée, et non pas celle de gauche à droite, et examinons la conclusion de l'auteur, duquel voici les mots :

« *Puisque la balle ne perd rien* (1) *du tout de la détermination qu'elle avoit à s'avancer vers le côté droit, en deux fois autant de temps qu'elle en a mis à passer depuis la ligne* AC *jusques à* HB, *elle doit faire deux fois autant de chemin vers ce même côté.* »

8. Voyez comme il retombe dans sa première faute, ne distinguant pas la détermination de la force du mouvement; et pour mieux vous le faire entendre, appliquons son raisonnement à un autre cas.

Supposons, en la même figure, que la balle soit poussée du point H au point B. Il est certain qu'elle continuera son mouvement dans la ligne BG et que sa détermination ne change point; mais aussi son mouvement est plus lent dans la ligne BG qu'il n'étoit auparavant, et

(1) Texte de la Dioptrique, page 17 : *Et puisqu'elle ne perd rien etc.*

néanmoins, si le raisonnement de l'auteur étoit vrai, nous pourrions dire :

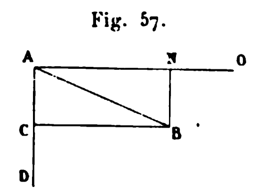
Puisque la balle ne perd rien du tout de la détermination qu'elle avoit à s'avancer vers HBG (car c'est toute la même), donc, en autant de temps qu'auparavant, elle fera autant de chemin.

Vous voyez que cette conclusion est absurde, et que, pour rendre l'argument bon, il faudroit que la balle ne perdît rien de sa détermination ni de sa force, et partant, voilà un paralogisme très manifeste.

9. Mais, pour détruire pleinement la proposition, il faut examiner deux sortes de mouvements composés qui se font sur deux lignes droites.

Considérons, par exemple (*fig.* 57), les deux lignes DA et AO, qui comprennent l'angle DAO de quelque grandeur que vous voudrez, et

Fig. 57.



imaginons un grave au point A, qui descende dans la ligne ACD en même temps que la ligne s'avance vers AN, à telle condition qu'elle fasse toujours un même angle avec AO, et que le point A de la même ligne ACD soit toujours dans la ligne AN. Si les deux mouvements, de la ligne ACD vers AO et du même grave dans la ligne ACD, sont uniformes comme nous les pouvons supposer, il est certain que ce mouvement composé conduira toujours le grave dans une ligne droite, comme AB, dans laquelle si vous prenez un point, comme B, duquel vous tiriez les lignes BN et BC parallèles aux lignes DA et AO, lorsque le grave sera au point B, en un temps égal, s'il n'y eût eu que le mouvement sur ACD, il eût été au point C, et s'il n'y eût eu que l'autre mouvement tout seul, il eût été au point N; et la proportion de la force qui le conduit sur AD à la force qui le conduit vers AO sera comme AC à AN, c'est-à-dire comme BN à BC.

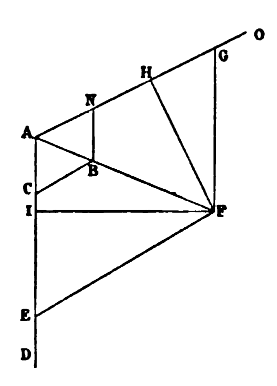
C'est de cette sorte de mouvements composés que se servent Archimède et les autres anciens en la composition de leurs hélices, desquelles la principale propriété est que les deux forces mouvantes ne s'empêchent point mutuellement, ains demeurent toujours les mêmes. Mais, pource que ce mouvement composé ne vient pas si bien dans l'usage, il le faut considérer d'une autre façon et en faire une spéculation particulière.

10. Supposons en la même figure un grave au point A, lequel en même temps est poussé par deux forces, dont l'une le pousse vers AO et l'autre vers AD, si bien que la ligne de direction du premier mouvement est AO, et celle du second est AD. S'il n'y avait que la première force toute seule, le grave se trouveroit toujours sur AO, et sur AD s'il n'y avoit que la seconde; mais, puisque ces deux forces s'empêchent et se résistent mutuellement, supposons (et il faut se souvenir que nous supposons aussi tous ces mouvements uniformes, car autrement le mouvement composé ne se feroit pas sur des lignes droites) que dans une minute d'heure, par exemple, la seconde force fait que le grave s'éloigne de sa direction AO selon la longueur NB, qu'il faut décrire parallèle à AD; car le grave qui est emporté sur AD par la seconde force, se trouvant empêché par la première, se portera toujours et s'avancera d'A vers D par des parallèles à AD. Supposons aussi que, dans la même minute d'heure, la première force fait que le grave s'éloigne de sa direction AD selon la longueur CB parallèle, par la précédente raison, à la ligne AO. Il est tout certain que dans une minute d'heure le grave se trouvera au point B, qui est le concours des deux lignes BN et BC. Le mouvement composé se fera donc sur la ligne AB, et nous pourrons dire que le grave parcourra la ligne AB dans une minute.

11. Supposons maintenant (*fig.* 58) que l'angle DAO soit changé et soit, par exemple, plus grand. En la figure suivante, les mêmes choses étant posées comme auparavant, je dis que, dans une minute d'heure, le grave s'éloignera de sa direction AO selon la ligne BN égale à celle que nous avons appelée de même en la précédente figure. Car, puisque

les forces sont les mêmes, la seconde diminuera également la détermination de la première, et fera, en temps égal, éloigner le grave de sa direction autant comme auparavant, pource que c'est toujours la même résistance. Nous conclurons la même chose de la ligne BC.

Fig. 58.



Le mouvement composé se fera donc ici sur la ligne AB, et la ligne AB sera parcourue comme devant en une minute d'heure; mais, pource que, dans les deux triangles ANB de la première et seconde figure, les côtés AN et NB de la première figure sont égaux à ceux de la seconde, et que les angles ANB qu'ils comprennent sont inégaux, il s'ensuit que les bases AB seront inégales (et par conséquent le mouvement composé sera moins vite en la seconde qu'en la première), et qu'il y aura telle proportion de la vitesse du mouvement composé en la première figure à la vitesse du mouvement composé en la seconde, que de la longueur de la ligne AB en la première à la longueur de la ligne AB en la seconde.

12. Je prends maintenant un point à discrétion dans la ligne AB, comme F, duquel je tire les lignes FE, FG parallèles à AO et à AD.

FE est à CB comme FA à AB, c'est-à-dire FG à BN,

comme la construction nous marque : donc

FE est à FG comme CB à BN.

Or, en la précédente figure, les lignes BN et BC sont égales, chacune à la sienne, aux lignes BN et BC de cette seconde figure, et nous pouvons, par un même raisonnement, prendre un point à discrétion dans la ligne AB de la première figure, pour en tirer une pareille conclusion à la précédente. Donc, quelque point que vous preniez dans la ligne AB, soit de la première, soit de la seconde figure, les parallèles seront entre elles comme CB à BN, c'est-à-dire toujours en même proportion.

Du point F tirons les perpendiculaires FH, FI sur les lignes AO et AD. Au parallélogramme GAEF, les angles AGF, AEF seront égaux comme étant opposés : donc les triangles GFH et EFI sont équiangles, et par conséquence,

comme EF est à FG, ainsi FI est à FH.

Or

FI est à FH comme le sinus de l'angle DAF est au sinus de l'angle OAF,

et par conséquent, faisant, si vous voulez, une même construction en la première figure, vous conclurez, pour éviter prolixité, que le sinus de l'angle DAB est au sinus de l'angle OAB en la première figure, comme le sinus de l'angle DAF au sinus de l'angle OAF en la seconde figure (1).

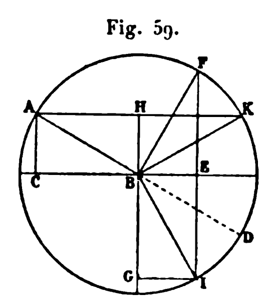
13. Cela ainsi supposé et démontré, considérons la figure de la page 20 de la Dioptrique (*fig.* 59), en laquelle l'auteur suppose que la balle, ayant été premièrement poussée d'A vers B, est poussée de rechef, étant au point B, par la raquette CBE, qui sans doute, au sens de l'auteur, pousse vers BG; de sorte que de ces deux mouvements, dont l'un pousse vers BD et l'autre vers BG, il s'en fait un troisième qui conduit la balle dans la ligne BI.

14. Imaginons ensuite une seconde figure pareille à celle-là, en

(1) On voit que désormais Fermat reconnaît pleinement, pour la composition des forces concourantes, le principe du parallélogramme qu'il avait mis en doute dans sa discussion avec Roberval sur la Géostatique (voir notamment Pièce XVI).

laquelle la force de la balle et celle de la raquette soient les mêmes, et que l'angle DBG soit seulement plus grand en cette seconde figure. Il est certain, par les démonstrations que nous venons de faire, qu'il y aura telle proportion du sinus de l'angle GBI au sinus de l'angle IBD, en la figure de l'auteur, que du sinus de l'angle GBI au sinus de l'angle IBD, en cette seconde figure que nous imaginons être décrite

Fig. 59.



et que nous omettons pour éviter la longueur, là où, si les propositions de l'auteur étoient vraies, il y auroit telle proportion du sinus de l'angle GBD au sinus de l'angle GBI, en la figure de l'auteur, que du sinus de l'angle GBD au sinus de l'angle GBI, en cette seconde figure que nous avons imaginée. Or, puisque cette proportion est différente de l'autre, il s'ensuit qu'elle ne peut pas subsister (¹).

15. D'ailleurs la principale raison de la démonstration de l'auteur est fondée sur ce qu'il croit que le mouvement composé sur BI est toujours également vite, quoique l'angle GBD, compris sous les lignes de direction des deux forces mouvantes, vienne à changer : ce qui est faux, comme nous avons déjà pleinement démontré.

16. Ce n'est pas que je veuille assurer qu'en l'application qu'il fait

(¹) Ainsi Fermat conclut que, si l'on doit, avec Descartes, considérer le mouvement suivant le rayon réfracté comme résultant du mouvement suivant le rayon incident et d'une action suivant la normale, la proportionalité doit exister non pas entre les sinus des angles d'incidence et de réfraction, $\sin i$ et $\sin r$, mais entre $\sin(i-r)$ et $\sin r$. A cet effet, il suppose implicitement l'action normale indépendante de l'incidence. L'hypothèse de Descartes est au contraire que la composante parallèle à la surface d'incidence garde la même valeur avant et après la réfraction. Il est clair qu'*a priori* on ne peut décider entre ces deux suppositions.

de la figure de la page 20 à la réfraction, il faille garder ma proportion et non pas la sienne; car je ne suis pas assuré si ce mouvement composé doit servir de règle à la réfraction, sur laquelle je vous dirai une autre fois plus au long mes sentiments.

17. J'attendrai la réponse ([1]) à cette Lettre, puisque vous me la faites espérer, et serai toujours, mon Révérend Père, votre très humble serviteur.

L'excuse que vous avez vue au commencement de ma lettre me servira encore sur ce que je ne vous ai point écrit de ma main.

([1]) Descartes, n'ayant reçu la Lettre XXIV qu'au moment où il avait à défendre contre Roberval sa propre critique de la méthode des tangentes de Fermat (*voir* ci-après Lettre XXV, 1[re] note), ajouta le même jour (22 février 1638) à son courrier pour Mersenne une Lettre spéciale sur la Dioptrique, adressée à Mydorge (éd. Clerselier, III, 42). Mais cette réplique, qu'on trouvera dans le *Supplément* à la présente édition, ne fut communiquée à Fermat que vers le mois de juin 1638, alors que s'arrangeait le différend sur la méthode des tangentes. Descartes ne se montrant pas disposé à satisfaire davantage Fermat sur la question de la réfraction, la discussion en fut également suspendue pour n'être reprise que vingt ans après, entre Fermat et Clerselier. La présente Lettre XXIV fit alors l'objet d'une réfutation spéciale (*ci-après* Pièce XCIV) composée par Rohault.

ANNÉE 1638.

XXV.

DESCARTES A MERSENNE (¹).

< LUNDI 18 JANVIER 1638 >

(D, III, 56.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Je serois bien aise de ne rien dire de l'Écrit que vous m'avez envoyé (²), pource que je n'en saurois dire aucune chose qui soit à l'avantage de celui qui l'a composé. Mais à cause que je reconnois que c'est celui même qui avoit ci-devant tâché de réfuter ma Dioptrique,

(¹) Lettre destinée à Fermat et envoyée à Mersenne en même temps que celle qui la précède (III, 55) dans l'édition Clerselier. Au lieu de l'adresser à Toulouse, le correspondant de Descartes la montra à Roberval et Étienne Pascal qui, prenant la défense de la Méthode attaquée, rédigèrent une Réplique (perdue). Elle fut envoyée, le 8 février 1638, par Mersenne à Descartes, qui répondit vers le 22 février (éd. Clerselier, III, 41, à Mersenne; III, 57, à Mydorge) en faisant appel à Mydorge et Hardy comme juges. Le 26 mars, Mersenne fit part à Descartes (qui répliqua le 3 mai par la Lettre XXVII ci-après) de nouvelles objections de Roberval et, probablement au commencement d'avril, ce dernier composa une seconde Défense de la Méthode de Fermat (éd. Clerselier, III, 58). Ainsi fut engagé ce *procès mathématique*, auquel Fermat resta de fait étranger pendant toute cette phase (*voir* ci-après Lettre XXVI) et dont les pièces seront réunies dans le *Supplément* de la présente édition.

Le texte de cette Lettre XXV a été revisé d'après une copie ancienne dans le MS. Bibl. Nat. fr. n. a. 5160, f^os 53 à 56.

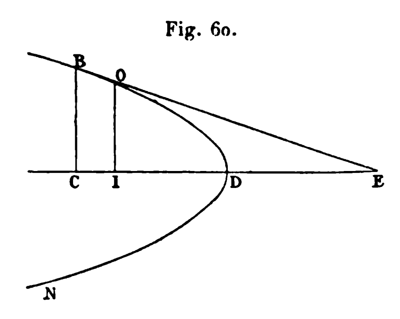
(²) L'envoi fait par Mersenne vers la fin de décembre 1637 comprenait, outre l'écrit dont il est ici question (*Methodus ad disquirendam maximam et minimam. — De tangentibus linearum curvarum.* Tome I, pages 133 à 136), l'*Isagoge ad locos planos et solidos* (Tome I, pages 91 et suiv.), qui, formant un paquet séparé, ne parvint à Descartes qu'un peu plus tard. Ces pièces avaient été remises à Mersenne par Carcavi.

et que vous me mandez qu'il a envoyé ceci après avoir lu ma Géométrie et s'étonnant de ce que je n'avois point trouvé la même chose, c'est-à-dire, comme j'ai sujet de l'interpréter, à dessein d'entrer en concurrence et de montrer qu'il sait en cela plus que moi; puis aussi à cause que j'apprends par vos lettres qu'il a la réputation d'être fort savant en Géométrie, je crois être obligé de lui répondre.

2. Premièrement donc, je trouve manifestement de l'erreur en sa règle, et encore plus en l'exemple qu'il en donne pour trouver les contingentes de la parabole : ce que je trouve en cette sorte.

Soit (*fig.* 60) BDN la parabole donnée dont DC est le diamètre, et que du point donné B il faille tirer la ligne droite BE qui rencontre

Fig. 60.



DC au point E et qui soit la plus grande qu'on puisse tirer du même point E jusques à la parabole : *sic enim proponitur quærenda maxima.*

Sa règle dit : *statuatur quilibet quæstionis terminus esse A*; je prends donc EC pour A, ainsi qu'il a fait : *et inveniatur maxima* (à savoir BE) *in terminis sub A gradu, ut libet, involutis;* ce qui ne se peut faire mieux qu'en cette façon : Que BC soit B, le quarré de BE sera $Aq. + Bq.$, à cause de l'angle droit BCE.

Ponatur rursum idem terminus qui prius esse $A + E$; à savoir je fais que EC est $A + E$ (ou bien, suivant son exemple, $A - E$, car l'un revient à l'autre) : *iterumque inveniatur maxima* (à savoir BE) *in terminis sub A et E gradibus ut libet coefficientibus;* ce qui ne se peut mieux faire qu'en cette sorte : Posons que CD ait été ci-devant D, lorsque BC étoit B, le côté droit de la parabole sera $\frac{Bq.}{D}$, à cause qu'il est à BC,

la ligne appliquée par ordre, comme BC est à CD le segment du diamètre auquel elle est appliquée. C'est pourquoi, maintenant que CE est $A+E$, DC est $D+E$, et le quarré de BC est $\frac{Bq.\text{ in }D+Bq.\text{ in }E}{D}$, qui étant ajouté au quarré de CE, qui est $Aq.+A\text{ in }E\text{ bis}+Eq.$, il fait le quarré de BE.

Adæquentur duo homogenea maximæ æqualia; c'est-à-dire que $Aq.+Bq.$ soit posé égal à

$$Bq.+\frac{Bq.\text{ in }E}{D}+Aq.+A\text{ in }E\text{ bis}+Eq.:$$

et demptis communibus, il reste

$$\frac{Bq.\text{ in }E}{D}+A\text{ in }E\text{ bis}+Eq.\text{ égal à rien.}$$

Applicentur ad E etc.; il vient

$$\frac{Bq.}{D}+A\text{ bis}+E.$$

Elidatur E, il reste

$$\frac{Bq.}{D}+A\text{ bis égal à rien.}$$

Ce qui ne donne point la valeur de la ligne A, comme assure l'auteur, et par conséquent sa règle est fausse.

3. Mais il se mécompte encore bien plus en l'exemple de la même parabole, dont il tâche de trouver la contingente. Car, outre qu'il ne suit nullement sa règle, comme il paroît assez de ce que son calcul ne se rapporte point à celui que je viens de faire, il use d'un raisonnement qui est tel que, si seulement, au lieu de *parabole* et *parabolen,* on met partout en son discours *hyperbole* et *hyperbolen* ou le nom de quelque autre ligne courbe, telle que ce puisse être, sans y changer au reste un seul mot, le tout suivra en même façon qu'il fait touchant la parabole jusques à ces mots : *ergo* CE *probavimus duplam ipsius* CD, *quod quidem ita se habet. Nec unquam fallit methodus;* au lieu desquels on peut mettre : *non ideo sequitur* CE *duplam esse ipsius* CD, *nec unquam*

ita se habet alibi quam in parabole, ubi casu et non ex vi præmissarum verum concluditur : semperque fallit ista methodus.

4. Si cet auteur s'est étonné de ce que je n'ai point mis de telles règles en ma Géométrie, j'ai beaucoup plus de raison de m'étonner de ce qu'il a voulu entrer en lice avec de si mauvaises armes. Mais je lui veux bien encore donner le temps de remonter à cheval, et de prendre toutes les meilleures qu'il eût pu choisir pour ce combat, qui sont que, si on change quelques mots de la règle qu'il propose pour trouver *maximam* et *minimam*, on la peut rendre vraie et est assez bonne.

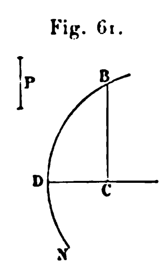
Ce que je ne pourrois néanmoins ici dire, si je ne l'avois su dès auparavant que de voir son Écrit : car, étant tel qu'il est, il m'eût plutôt empêché de la trouver qu'il ne m'y eût aidé. Mais encore que je l'aurois ignorée et que lui l'auroit parfaitement sue, il ne me semble pas qu'il eût pour cela aucune raison de la comparer avec celle qui est en ma Géométrie touchant le même sujet.

5. Car premièrement la sienne (c'est-à-dire celle qu'il a eu envie de trouver) est telle que, sans industrie et par hasard, on peut aisément tomber dans le chemin qu'il faut tenir pour la rencontrer, lequel n'est autre chose qu'une fausse position fondée sur la façon de démontrer qui réduit à l'impossible et qui est la moins estimée et la moins ingénieuse de toutes celles dont on se sert en mathématique. Au lieu que la mienne est tirée d'une connoissance de la nature des équations, qui n'a jamais été, que je sache, assez expliquée ailleurs que dans le troisième Livre de ma Géométrie; de sorte qu'elle n'eût su être inventée par une personne qui auroit ignoré le fonds de l'algèbre, et elle suit la plus noble façon de démontrer qui puisse être, à savoir celle qu'on nomme *a priori*.

6. Puis, outre cela, sa règle prétendue n'est pas universelle comme il lui semble, et elle ne se peut étendre à aucune des questions qui sont un peu difficiles, mais seulement aux plus aisées, ainsi qu'il pourra éprouver si, après l'avoir mieux digérée, il tâche de s'en servir pour trouver les contingentes, par exemple, de la ligne courbe BDN

(*fig.* 61), que je suppose être telle qu'en quelque lieu de sa circonférence qu'on prenne le point B, ayant tiré la perpendiculaire BC, les deux cubes des deux lignes BC et CD soient ensemble égaux au parallélépipède des deux mêmes lignes BC, CD et de la ligne donnée P.

Fig. 61.



(A savoir, si P est 9 et que CD soit 2, BC sera 4, pource que les cubes de 2 et de 4, qui sont 8 et 64, font 72, et que le parallélépipède composé de 9, 2 et 4 est aussi 72.)

Car elle ne se peut appliquer ni à cet exemple, ni aux autres qui sont plus difficiles, au lieu que la mienne s'étend généralement à tous ceux qui peuvent tomber sous l'examen de la géométrie, non seulement en ce qui regarde les contingentes des lignes courbes, mais il est aussi fort aisé de l'appliquer à trouver *maximas* et *minimas* en toute autre sorte de problèmes; de façon que, s'il l'avoit assez bien comprise, il n'auroit pas dit, après l'avoir lue, que j'ai omis cette matière en ma Géométrie.

7. Il est vrai toutefois que je n'y ai point mis ces termes de *maximis* et *minimis*, dont la raison est qu'ils ne sont connus que parce qu'Apollonius en a fait l'argument de son cinquième Livre, et que mon dessein n'a point été de m'arrêter à expliquer aucune chose de ce que quelques autres ont déjà su, ni de réparer les livres perdus d'Apollonius, comme Viète, Snellius, Marinus Ghetaldus ([1]), etc., mais seulement de passer au delà de tous côtés, comme j'ai assez fait voir en commençant par une question que Pappus témoigne n'avoir pu être trouvée par aucun des Anciens; et par même moyen, en composant et

([1]) *Voir* Tome I, p. 3, note 3.

déterminant tous les lieux solides, ce qu'Apollonius cherchoit encore; puis en réduisant par ordre toutes les lignes courbes, la plupart desquelles n'avoient pas même été imaginées, et donnant des exemples de la façon dont on peut trouver toutes leurs propriétés; puis enfin, en construisant non seulement tous les problèmes solides, mais aussi tous ceux qui vont au sursolide ou au quarré de cube; et par même moyen, enseignant à les construire en une infinité de diverses façons.

D'où l'on peut aussi apprendre à déguiser en mille sortes la règle que j'ai donnée pour trouver les contingentes, comme si c'étoient autant de règles différentes. Mais j'ose dire qu'on n'en peut trouver aucune, si bonne et si générale que la mienne, qui soit tirée d'un autre fondement.

8. Au reste, encore que j'aie écrit (1) que ce problème pour trouver les contingentes fût le plus beau et le plus utile que je süsse, il faut remarquer que je n'ai pas dit pour cela qu'il fût le plus difficile, comme il est manifeste que ceux que j'ai mis ensuite touchant les figures des verres brûlans, lesquels le présupposent, le sont davantage. De façon que ceux qui ont envie de faire paroitre qu'ils savent autant de géométrie que j'en ai écrit, ne doivent pas se contenter de chercher ce problème par d'autres moyens que je n'ai fait, mais ils devroient plutôt s'exercer à composer tous les lieux sursolides, ainsi que j'ai composé les solides, et à expliquer la figure des verres brûlans, lorsque l'une de leurs superficies est une partie de sphère ou de conoïde donnée, ainsi que j'ai expliqué la façon d'en faire qui aient l'une de leurs superficies autant concave ou convexe qu'on veut, et enfin à construire tous les problèmes qui montent au quarré de quarré de quarré ou au cube de cube, comme j'ai construit tous ceux qui montent au quarré de cube.

9. Et après qu'ils auront trouvé tout cela, je prétends encore qu'ils m'en devront savoir gré, au moins s'ils se sont servis à cet effet de ma

(1) *Geometrie de Descartes*, éd. Hermann, Paris, 1886, p. 33.

Géométrie, à cause qu'elle contient le chemin qu'il faut tenir pour y parvenir, et que, si même ils ne s'en sont point servis, ils ne doivent pas pour cela prétendre aucun avantage par dessus moi, d'autant qu'il n'y a aucune de ces choses que je ne trouve autant qu'elle est trouvable, lorsque je voudrai prendre la peine d'en faire le calcul. Mais je crois pouvoir employer mon temps plus utilement à d'autres choses.

Je suis etc.

XXV *bis* (1).

FERMAT A MERSENNE.

< FÉVRIER 1638 >

(A, f^{os} 35-36, B, f^{os} 21ro-22ro.)

Mon Révérend Père,

1. J'ai appris par votre lettre que ma réplique (2) à M. Descartes n'étoit pas goûtée, que même il avoit trouvé à dire à mes méthodes *de maximis et minimis et de tangentibus* (3), en quoi pourtant il avoit trouvé M^{rs} de Pascal et de Roberval de contraire sentiment. De ces deux choses, la première ne m'a point surpris, pource que les choses de physique peuvent toujours nous fournir de doutes et entretenir les disputes; mais je suis étonné de la dernière, puisque c'est une vérité géométrique, et que je soutiens que mes méthodes sont aussi certaines que la construction de la 1re proposition des Éléments. Peut-être que les ayant proposées nuement et sans démonstration, elles n'ont pas été

(1) Réponse inédite à une lettre par laquelle Mersenne, sans communiquer à Fermat la critique de Descartes relative à la Méthode *de maximis et minimis*, c'est-à-dire la Pièce XXV, l'informait que cette critique avait donné lieu à une réplique (perdue) de Roberval et de Pascal, envoyée à Descartes le 8 février 1638.

(2) Lettre XXIV. Mersenne avait parlé de l'impression produite dans son cercle, à Paris, par cette Lettre, non pas de la réplique de Descartes, qu'il n'avait pas encore reçue.

(3) Tome I, pages 133 à 136.

entendues ou qu'elles ont paru trop aisées à M. Descartes, qui a fait tant de chemin et a pris une voie si pénible pour ces tangentes dans sa Géométrie.

2. Quoi qu'il en soit, je ne me pique pas d'être cru que par ceux qui le voudront, et vous proteste que j'aimerois mieux prononcer :

Jam jam efficaci do manus scientiae (1),

que de souffrir que rien de ce que je vous ai envoyé soit imprimé sous mon nom, ce que je vous prie d'empêcher par le pouvoir que vous avez sur tous ces Messieurs qui se mêlent de cette étude. Je ne vous envoierai donc plus rien pour M. Descartes, puisqu'il met des loix si sévères à un commerce innocent, et me contente de vous dire que je n'ai trouvé encore personne ici qui ne soit de mon avis, que sa Dioptrique n'est pas prouvée. Je voudrois seulement savoir si dans Paris on croit qu'il ait démontré exactement les fondements et les principes de la réfraction, et particulièrement qu'il vous plût me faire part des sentiments de M. Mydorge sur ce sujet, et de M. Desargues.

3. Voilà pour ce sujet. Pour les manuscrits de Viète (2), il n'y a que fort peu de chose que vous n'ayez pas dans les imprimés : ce sont seulement des exemples plus étendus et quelques propositions de *nombres multangulaires*, qui se trouvent en d'autres livres, de sorte que l'impression de ses œuvres n'en perdroit guère. Outre que je les ai reçus de M. Despagnet à la charge de ne les bailler à personne que par son aveu.

4. Puisque M. de Roberval a soutenu ma méthode, je lui veux faire encore part d'un de ses plus beaux usages touchant l'*invention des centres de gravité*, puisque M. de Beaugrand ne les lui a pas baillés, comme je l'en avois prié. Et ne sera pas mal qu'on propose à M. Descartes l'in-

(1) Vers d'Horace, *Épodes*, XVII, 1.

(2) On voit que Mersenne songeait déjà à l'édition des Œuvres de Viète, imprimée à Leyde par les Elzevirs en 1646 et à laquelle il apporta un concours efficace.

vention de quelques-uns de ces centres de gravité. Vous m'obligerez de donner cet écrit [1] à M. de Roberval et de m'envoyer son sentiment là-dessus, et s'il croit que nous soyons obligés d'envoyer à Leyde, pour avoir la solution des problèmes géométriques.

Mon Révérend Père, votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

5. Je [2] serai bien aise de savoir le jugement de Mrs de Roberval et de Pascal sur mon *Isagoge topique* et sur l'*Appendix* [3], s'ils ont vu l'un et l'autre.

6. Et, pour leur faire envie de quelque chose d'excellent, il faut étendre les lieux d'un point à plusieurs *in infinitum* : comme par exemple, au lieu qu'on dit d'ordinaire :

Trouver une parabole en laquelle, prenant tel point qu'on voudra, il produise toujours un même effet,

je veux proposer :

Trouver une parabole en laquelle prenant tels deux, trois, quatre, cinq, etc. points que vous voudrez, ils produisent toujours un même effet, et ainsi à l'infini.

C'est chose que j'ai trouvée et plusieurs autres par l'aide de ces misérables méthodes qui passent pour sophistiques. Bien plus, je puis encore donner la résolution de cette question :

Trouver autant de lignes courbes qu'on demandera, en chacune des-

(1) Il s'agit du fragment imprimé Tome I, pages 136 à 139, et pour lequel (page 136, note 3) le 20 avril 1638 a été indiqué à tort comme date de la lettre d'envoi.
Pour la communication antérieure à Beaugrand, *voir* Lettre XVIII, **5**.

(2) Le post-scriptum qui suit se retrouve imprimé, sauf le dernier alinéa, dans les *Lettres de Descartes* (éd. Clerselier, III, page 383) comme Extrait d'une lettre de Fermat, inséré dans un envoi de Mersenne à Descartes (du 28 avril ou du 1er mai 1638). Il s'y trouve précédé, dans le même Extrait, du premier alinéa de l'écrit *Centrum gravitatis parabolici conoidis* (Tome I, pages 136 à 139), qui, comme on l'a vu dans la note précédente, fut envoyé par Fermat pour Roberval, dans la présente lettre à Mersenne. Il est clair que le post-scriptum était également destiné à Roberval.

(3) Tome I, pages 91 à 110. Ce passage prouve que l'*Appendix* est, comme l'*Isagoge*, antérieur à la publication de la *Géométrie* de Descartes.

quelles prenant tel nombre de points qu'on voudra, tous ces points ensemble produisent un même effet.

7. J'oubliois de vous dire, sur le sujet de la *roulette* [1] de M. de Roberval, que je crois qu'il n'aura pas persisté en l'opinion qu'il avoit, de lui avoir donné un cercle égal. Je vous prie de le savoir de lui.

XXVI.

FERMAT A MERSENNE.

MARDI 20 AVRIL 1638 [2].

(D. III, 36.)

Mon Révérend Père,

1. Je vous suis extrêmement obligé du soin que vous prenez pour satisfaire ma curiosité, m'ayant bien voulu faire part d'une Lettre que je trouve très-excellente, soit pour la matière qu'elle contient, soit pour les paroles dont on s'est servi; c'est celle qui est signée *Petit* [3], qui est un nom inconnu pour moi, mais qui m'a donné un très grand desir d'être connu de lui; je serai ravi qu'il vous plaise de m'en donner le moyen, et j'ai cru que ni vous ni lui ne désapprouveriez pas la

(1) Mersenne avait parlé à Fermat de la quadrature de la cycloïde, obtenue par Roberval.

(2) L'annotateur anonyme de l'exemplaire des *Lettres de Descartes* de la Bibliothèque de l'Institut prétend que la date ne s'applique qu'au post-scriptum et que le corps de la lettre remonte au 26 novembre 1637. Victor Cousin, dans son édition des *Œuvres de Descartes* (t. VI, p. 365), adopte la même opinion qui nous paraît insoutenable, car si Clerselier a commis des confusions dans les lettres qu'il a publiées d'après les minutes non datées de Descartes, ces confusions ont résulté uniquement du désordre dans lequel se sont trouvées ces minutes à la suite d'un accident où elles ont failli être détruites. Mais la présente lettre était évidemment écrite (en copie par Mersenne) sur un seul feuillet et n'a pu souffrir aucun dérangement.

(3) Mersenne avait annoncé à Descartes cet écrit de Petit dans une lettre du 12 février 1638 (*Lettres de Descartes*, III, p. 190). Il le lui envoya le 12 mars (III, p. 389).

liberté que j'ai prise d'effacer sur la fin quelques paroles qui marquoient que ses objections contre la *Dioptrique* de M. Descartes étoient plus fortes et moins sujettes à réplique que les miennes. Ce n'est pas que j'en doute, puisque j'ai conçu une très grande opinion de son esprit; mais je désire, si vous l'agréez, d'être un peu mis à l'écart, et de voir toutes ces belles disputes plutôt comme témoin que comme partie.

2. Vous ajouterez une très grande obligation à toutes celles que je vous ai déjà, si vous me procurez la vue de ce Discours que l'auteur de cette belle Lettre promet touchant *la réfraction*. Et si j'osois espérer la communication des expériences qu'il a faites, peut-être y mêlerois-je de la géométrie, si je les trouvois conformes à mon sentiment. J'attendrai cette satisfaction avec impatience, et vous renvoierai par le premier courrier son écrit, que je retiens pour en tirer copie.

3. J'attends aussi par votre faveur les réponses [1] que M. Descartes a faites aux difficultés que je vous ai proposées sur sa *Dioptrique*, et ses remarques [2] sur mon Traité *de maximis et minimis et de tangentibus*. S'il y a quelque petite aigreur, comme il est malaisé qu'il n'y en ait, vu la contrariété qui est entre nos sentiments, cela ne vous doit point détourner de me les faire voir; car je vous proteste que cela ne fera aucun effet en mon esprit, qui est si éloigné de vanité, que M. Descartes ne sauroit m'estimer si peu que je ne m'estime encore moins. Ce n'est pas que la complaisance me puisse obliger de me dédire d'une vérité que j'aurai connue, mais je vous fais par là connoître mon humeur. Obligez-moi, s'il vous plaît, de ne différer plus à m'envoyer ses écrits, auxquels par avance je vous promets de ne faire point de réplique.

4. J'ai fort vû ces jours passés M. Despagnet, avec qui je vis de

(1) *Lettres de Descartes*, éd. Clerselier : Descartes à Mydorge, III, 42; fin de la lettre III, 57 (p. 312) à Mydorge.

(2) *Voir* ci-avant Lettre XXV. Mersenne aurait pu communiquer aussi dès lors à Fermat les autres lettres écrites à ce sujet par Descartes (*Lettres de Descartes*, éd. Clerselier : à Mersenne, III, 41; à Mydorge, III, 42; à Mydorge, III, 57).

longue main comme un ami intime; s'il va à Paris, comme il espère, il vous dira qu'il est de mon avis en tous les petits Discours que j'ai faits, sans en exclure la Dioptrique.

J'attends de vos nouvelles, et suis, etc.

A Toulouse, ce 20 avril 1638.

5. Quand vous voudrez que ma petite guerre contre M. Descartes cesse, je n'en serai pas marri et, si vous me procurez l'honneur de sa connoissance, je ne vous en serai pas peu obligé.

(A f° 60) (1).

6. Outre le papier (2) envoyé à R(oberval) et P(ascal), pour suppléer à ce qu'il y a de trop concis, il faut que M. Descartes sache, qu'après avoir tiré la parallèle qui concourt avec la tangente et avec l'axe ou diamètre des lignes courbes, je lui donne premièrement le nom qu'elle doit avoir comme ayant un de ses points dans la tangente, ce qui se fait par la règle des proportions qui se tire des deux triangles semblables. Après avoir donné le nom, tant à notre parallèle qu'à tous les autres termes de la question, tout de même qu'en la parabole, je considère derechef cette parallèle, comme si le point qu'elle a dans la tangente étoit en effet en la ligne courbe, et suivant la propriété spécifique de la ligne courbe, je compare cette parallèle par *adégalité* avec l'autre parallèle tirée du point donné à l'axe ou diamètre de la ligne courbe.

Cette comparaison par *adégalité* produit deux termes inégaux qui enfin produisent l'égalité (selon ma méthode), qui nous donne la solution de la question.

Et ce qu'il y a de merveilleux, est que l'opération nous indique si la

(1) Nous avons rattaché à la lettre du 20 avril 1638 le fragment suivant dont les copies par Arbogast portent sur le brouillon le titre : *De maximis et minimis, par M. Fermat* et la souscription : *Fin*; sur la mise au net, le titre : *Sur la méthode des tangentes, par Fermat*. Il a déjà été publié par M. Charles Henry (*Recherches*, pp. 183-184) d'après le brouillon d'Arbogast (Bibl. Nat. fr. n. a. 3280, f° 137), lequel n'a d'ailleurs eu entre les mains qu'une copie de Mersenne en partie indéchiffrable.

(2) Probablement la pièce insérée Tome I, pages 136-139. *Voir* Lettre XXV *bis*, 4.

ligne courbe est convexe ou concave, si la tangente est parallèle à l'axe ou diamètre, et de quel côté elle fait son concours lorsqu'elle n'est pas parallèle; ce qui serait trop long à décrire par le menu (1), et suffit de dire que nous trouvons des équations impossibles pour avoir pris le concours du mauvais côté, etc., de sorte qu'il paroît, même sans faire un plus grand discours, que l'équation se soudra aisément si le concours peut exister et en aussi peu de temps qu'on puisse imaginer.

XXVII.

DESCARTES A MERSENNE (2).

LUNDI 3 MAI 1638.

(D, III, 60.)

Mon Révérend Père,

1. Il y a déjà quelques jours que j'ai reçu votre dernière du 26 mars, où vous me mandez les exceptions (3) de ceux qui soutiennent l'Écrit

(1) A partir des mots *et suffit*, le texte est conjectural. Le brouillon d'Arbogast porte (les mots *en italique* sont ceux pour lesquels il a particulièrement hésité) :

« Et suffit lors que *nous trouvons* des équations impossibles, *nous ayons* pris le concours du mauvais côté *etc. de sorte* qu'il paroît *même sans faire un* plus grand *retour*, que l'équation *soit toujours* aussi *si le* concours peut exister et en aussi peu de temps qu'on puisse imaginer. »

Arbogast a ajouté en note : « Il me paroît que cette leçon est véritable, nous n'en avons pas mis la fin dans la copie au net, par ce que nous craignions de nous tromper. »

(2) Le texte de cette lettre a été corrigé sur l'original, actuellement conservé à la Bibliothèque Victor Cousin.

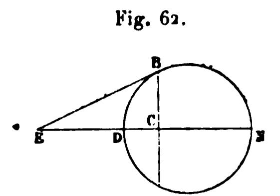
(3) Ces *exceptions* se retrouvent développées dans l'*Escrit de quelques amis de Monsieur de Fermat*, imprimé *Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 58. Mais Descartes ne l'avait pas encore reçu (*voir* ci-après, Lettre XXIX, 3); c'est donc à tort que la note de l'exemplaire de l'Institut, reproduite par Cousin (*Œuvres de Descartes*, t. VII, p. 23), assigne à cet Écrit la date du 15 mars 1638. Il ne doit avoir été envoyé qu'en avril; Descartes répondit seulement à Mersenne par la lettre III, 59 de l'édition Clerselier; la date du 14 avril 1638, indiquée pour cette lettre par l'annotateur anonyme (*Œuvres de Descartes*, éd. Cousin, t. VII, p. 35) est également trop reculée, Roberval n'ayant pas encore eu connaissance de cette réponse le 1er juin 1638.

ils ne disent rien qui serve à leur cause. Car il n'est pas requis qu'elle soit la plus grande absolument parlant, mais seulement qu'elle soit la plus grande sous certaines conditions, comme ils ont eux-mêmes défini au commencement de l'Écrit ([1]) qu'ils m'ont envoyé, où ils disent que cette invention de M. F. est *touchant les plus grandes et les moindres lignes ou les plus grands et les moindres espaces que l'on puisse mener ou faire sous certaines conditions proposées*.

Et ils ne sauroient nier que la ligne EB ne soit la plus grande qu'on puisse mener du point E jusques à la parabole sous les conditions que j'ai proposées, à savoir qu'elle n'aille que jusques à elle sans la traverser, comme ils ont assez dû entendre dès le premier coup. Mais pour faire mieux voir que leur excuse n'est aucunement valable, je donnerai ici un autre exemple où je ne parlerai ni de tangente ni de parabole, et où toutefois la règle de M. Fer. manquera en même façon qu'au précédent. Aussi bien vous vous plaignez quand je vous envoie du papier vide, et vous ne m'avez point donné d'autre matière pour remplir cette feuille.

Soit donné le cercle BDN (*fig.* 62), et que le point E qui en est dehors soit aussi donné et qu'il faille tirer de ce point E vers ce cercle

Fig. 62.



une ligne droite, en sorte que la partie de cette ligne qui sera hors de ce cercle entre sa circonférence et le point donné E soit la plus grande. Voici comment la règle donnée par M. Fer. enseigne qu'il y faut procéder.

Ayant mené la ligne EDN par le centre du cercle et sa partie ED étant nommée B, et sa partie DN qui est le diamètre étant C, *statuatur*

([1]) Écrit perdu, envoyé par Mersenne à Descartes le 8 février 1638.

quilibet quæstionis terminus esse A ([1]), ce qui ne se peut mieux faire qu'en menant BC perpendiculaire sur DN et prenant *A* pour CD.

Et inventâ maximâ etc. Pour trouver donc cette *maximam*, à savoir BE, puisque DC est *A* et DN est *C*, le quarré de BC est

$$A \text{ in } C - A\,quad.,$$

et puisque DC est *A* et DE est *B*, le quarré de CE est

$$Aq. + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis},$$

lequel joint au quarré de BC fait le quarré de la plus grande BE, qui est

$$A \text{ in } C + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis}.$$

Ponatur rursus idem qui prius terminus esse $A + E$, *iterumque inveniatur maxima,* ce qui ne se peut faire autrement, en suite de ce qui a précédé, qu'en posant $A + E$ pour DC. Et lors le quarré de BC est

$$C \text{ in } A + C \text{ in } E - Aq. - A \text{ in } E \text{ bis} - Eq.;$$

puis le quarré de CE est

$$Aq. + A \text{ in } E \text{ bis} + Eq. + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis} + E \text{ in } B \text{ bis},$$

lequel, étant joint à l'autre, fait

$$A \text{ in } C + E \text{ in } C + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis} + E \text{ in } B \text{ bis}$$

pour le quarré de la plus grande BE.

Adæquentur, c'est-à-dire qu'il faut poser

$$A \text{ in } C + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis égal à } A \text{ in } C + E \text{ in } C + Bq. + A \text{ in } B \text{ bis} + E \text{ in } B \text{ bis}.$$

Et demptis æqualibus ([2]), il reste

$$E \text{ in } C + E \text{ in } B \text{ bis égal à rien},$$

ce qui montre manifestement l'erreur de la règle.

5. Et afin qu'il ne puisse plus y avoir personne si aveugle qu'il ne

([1]) Descartes reprend successivement, comme dans la Lettre XXV, les différentes phrases du texte de la règle donnée par Fermat (Tome I, page 133).

([2]) Fermat avait dit *communibus* (Tome I, p. 133, ligne 3 en remontant).

la voie, je dirai ici en quelle sorte on la peut corriger. Car, bien que j'en aie touché un mot en ce que j'ai écrit à M. Mydorge (1), il y est néanmoins en telle façon que je ne désirois pas encore que tout le monde le pût entendre.

Premièrement donc à ces mots *et inventâ maximâ*, il est bon d'ajouter *vel aliâ quâlibet cujus ope possit postea maxima inveniri*. Car souvent, en cherchant ainsi la plus grande, on s'engage en beaucoup de calculs superflus.

Toutefois cela n'est pas un point essentiel; mais le principal et celui qui est le fondement de toute la règle est omis en l'endroit où sont ces mots : *Adæquentur duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia*, lesquels ne signifient autre chose sinon que la somme qui explique *maximam in terminis sub A gradu ut libet involutis*, doit être supposée égale à celle qui l'explique *in terminis sub A et E gradibus ut libet coefficientibus*.

Et vous demanderez, s'il vous plait, à ceux qui la soutiennent, si ce n'est pas ainsi qu'ils l'entendent, avant que de les avertir de ce qui doit y être ajouté : à savoir, au lieu de dire simplement *adæquentur*, il falloit dire : *adæquentur tali modo, ut quantitas per istam æquationem invenienda sit quidem una, cùm ad maximam aut minimam refertur, sed una emergens ex duabus quæ per eamdem æquationem possent inveniri essentque inæquales, si ad minorem maximâ vel ad majorem minimâ referrentur* (2).

6. Ainsi, en l'exemple que je viens de donner, ce n'est pas assez de chercher le quarré de la plus grande en deux façons; mais outre cela, il faut dire :

comme ce quarré, lorsqu'il est A in $C + Bq. + A$ in B bis,
est au même quarré, lorsqu'il est A in $C + E$ in $C + Bq. + A$ in B bis $+ E$ in B bis,
ainsi C in $A - Aq.$, qui est le quarré de BC,
est à C in $A + C$ in $E - Aq. - A$ in E bis $- Eq.$, qui est aussi le même quarré.

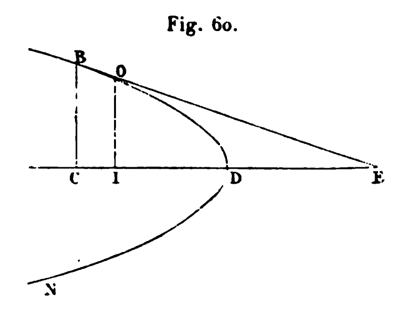
(1) *Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 57, page 306.
(2) Descartes essaye de ramener la méthode de Fermat à la sienne propre, c'est-à-dire à la recherche de la condition sous laquelle deux racines d'une équation deviennent égales.

Puis multipliant le premier de ces quarrés par le quatrième, on le doit supposer égal au second multiplié par le troisième, et après, en démêlant cette équation suivant la règle, on trouve son compte, à savoir que CD est $\frac{C \text{ in } B}{B \text{ bis} + C}$, comme il doit être.

7. Tout de même, en l'exemple de la parabole qui avoit été pris par M. F., et que j'avois suivi en mon premier Écrit ([1]), voici comme il faut opérer :

Soit BDN (*fig.* 60) la parabole donnée, dont DC est le diamètre, et que du point donné B il faille tirer la ligne droite BE, qui rencontre

Fig. 60.



DC au point E et qui soit la plus grande qu'on puisse tirer du même point E jusques à la parabole : — à savoir au dehors de cette parabole, comme ceux qui ne sont point sourds volontaires entendent assez, de ce que je la nomme la plus grande.

Je prends B pour BC et D pour DC, d'où il suit que le côté droit est $\frac{Bq.}{D}$, et sans m'arrêter à chercher la plus grande, je cherche seulement le quarré de BC en d'autres termes que ceux qui sont connus, en prenant A pour la ligne CE, et par après en prenant $A + E$ pour la même : à savoir, je la cherche premièrement par le triangle BCE, car

$$\text{comme } A \text{ est à } B, \quad \text{ainsi } A + E \text{ est à } \frac{A \text{ in } B + E \text{ in } B}{A},$$

qui par conséquent représente BC, et son quarré est

$$\frac{Aq. \text{in } Bq. + A \text{ in } E \text{ in } Bq. \text{bis} + Eq. \text{in } Bq.}{Aq.};$$

([1]) Lettre XXV.

puis je la cherche par la parabole, car, quand EC est $A + E$, DC est $D + E$, et le quarré de BC est

$$\frac{Bq.\text{ in } D + Bq.\text{ in } E}{D},$$

qui doit être égal au précédent, à savoir

$$\frac{A \text{ in } E \text{ in } Bq.\text{ bis} + Eq.\text{ in } Bq.}{Aq.} \text{ égal à } \frac{Bq.\text{ in } E}{D}.$$

D'où l'on trouve, en suivant la règle, que A, c'est-à-dire CE, est double de D, c'est-à-dire CD, comme elle doit être.

Or il est à remarquer que cette condition qui étoit omise, est la même que j'ai expliquée [1] en la page 346, comme le fondement de la méthode dont je me suis servi pour trouver les tangentes, et qu'elle est aussi tout le fondement sur lequel la règle de M. F. doit être appuyée; en sorte que, l'ayant omise, il fait paroître qu'il n'a trouvé sa règle qu'à tâtons, ou du moins qu'il n'en a pas conçu clairement les principes.

Et ce n'est point merveille qu'il l'ait pu former sans cela, car elle réussit en plusieurs cas, nonobstant qu'on ne pense point à observer cette condition, à savoir en ceux où l'on ne peut venir à l'équation qu'en l'observant, et la plupart sont de ce genre.

8. Pour ce qui est de l'autre article, où j'ai repris la façon dont se sert M. F. pour trouver la tangente de la parabole, vous dites qu'ils assurent tous qu'il faut prendre une propriété spécifique de l'hyperbole ou de l'ellipse pour en trouver les tangentes. En quoi nous sommes d'accord, car j'assure aussi la même chose et j'ai apporté expressément les exemples de l'ellipse et de l'hyperbole, qui concluent très mal, pour montrer que M. Fermat conclut mal aussi touchant la parabole dont il ne donne point de propriété spécifique.

Car de dire [2] qu'il y a plus grande proportion de CD à DI que du

[1] *Géométrie* de Descartes, éd. Hermann, pages 36 et 37.
[2] *Voir* Tome I, page 135, lignes 4 à 6.

quarré de BC au quarré de OI, ce n'est nullement une propriété spécifique de la parabole, vu qu'elle convient à toutes les ellipses et à une infinité d'autres lignes courbes, au moins lorsqu'on prend le point O entre les points B et E comme il a fait, et s'il l'eût pris au delà, elle eût convenu aux hyperboles. De façon que, pour la rendre spécifique, il ne falloit pas simplement dire *sumendo quodlibet punctum in recta* BE, mais il y falloit ajouter *sive sumatur illud intra puncta* B *et* E, *sive ultra punctum* B *in lineâ* EB *productâ*. Et cela ne peut être sous-entendu en son discours, à cause qu'il y décrit la ligne BE comme terminée des deux côtés, à savoir, d'un côté par le point B qui est donné, et de l'autre par la rencontre du diamètre CD.

Outre cela il falloit faire deux équations et montrer qu'on trouve la même chose en supposant EI être $A + E$, que lorsqu'on le suppose être $A - E$. Car sans cela le raisonnement de cette opération est imparfait et ne conclut rien.

9. Voilà sérieusement la vérité de cette affaire. Au reste, pour ce que vous ajoutez, que ces Messieurs qui ont pris connoissance de notre entretien ont envie de nous rendre amis, M. Fermat et moi, vous les assurerez, s'il vous plait, qu'il n'y a personne au monde qui recherche ni qui chérisse l'amitié des honnêtes gens plus que je fais, et que je ne crois pas qu'il me puisse savoir mauvais gré de ce que j'ai dit franchement mon opinion de son Écrit, vu qu'il m'y avoit provoqué. C'est un exercice entièrement contraire à mon humeur que de reprendre les autres, et je ne sache point l'avoir encore jamais tant pratiqué qu'en cette occasion; mais je ne la pouvois éviter après son défi, sinon en le méprisant, ce qui l'eût sans doute plus offensé que ma réponse.

Je suis, mon Révérend Père,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

DESCARTES.

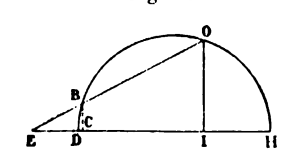
Du 3 mai 1638.

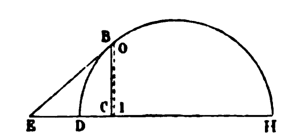
XXVIII.

BILLET AJOUTÉ A LA LETTRE PRÉCÉDENTE (1).

Pour entendre parfaitement la troisième (2) page de ma lettre, et par même moyen le défaut de la règle de M. de Fermat, il faut considérer ces trois figures (*fig.* 63) et penser que lorsqu'il dit : *Statuatur idem qui prius terminus esse* $A + E$, cela signifie qu'ayant posé EC pour A et EI pour $A + E$, il imagine EI être égal à EC, comme on le voit en la troisième figure, et que néanmoins il en fait le calcul tout de même que si elles étoient inégales, comme on le voit en la première et seconde figure, en cherchant premièrement EB par EC qu'il nomme A, puis EO par EI qu'il nomme $A + E$.

Fig. 63.





Et cela va fort bien, mais la faute est en ce qu'après les avoir ainsi calculées, il dit simplement : *Adæquentur.* Et on la peut voir clairement par la première figure où si l'on suppose la ligne EO (3) être égale à EB, il n'y a rien qui détermine les deux points B et O à s'assembler en un endroit de la circonférence du cercle plutôt qu'en l'autre, sinon que toute cette circonférence ne fût qu'un seul point, d'où vient que toutes les quantités qui demeurent en l'équation se trouvent égales à rien.

Mais pour faire que ces deux points B et O ne se puissent assembler

(1) L'original de la Lettre précédente a fait partie de la collection des autographes de Descartes anciennement conservée à l'Académie des Sciences et volée par Libri. Celui du fragment que nous cotons XXVIII n'y figurait pas; il n'est donc connu que par Clerselier.

(2) *Voir* plus haut XXVII, 5.

(3) *Addition en marge :* « Notez que je suppose ici que c'est le point E qui est donné et non le point B. »

qu'en un seul endroit, à savoir en celui où EB est la plus grande qu'elle puisse être sous la condition proposée, il faut considérer la seconde figure et, à cause des deux triangles semblables ECB et EIO, il faut dire :

comme EC ou BC est à EB, ainsi EI ou OI est à EO;

au moyen de quoi on fait qu'à mesure que la quantité EB est supposée plus grande, la quantité EO est supposée plus petite, à cause que les points E, B, O sont toujours là en même ligne droite. Et ainsi lorsque EB est supposée égale à EO, elle est supposée la plus grande qu'elle puisse être : c'est pourquoi on y trouve son compte.

Et c'est là le fondement de la règle qui est omis. Mais je crois que ce seroit pécher de l'enseigner à ceux qui pensent savoir tout et qui auroient honte d'apprendre d'un ignorant comme je suis; vous en ferez toutefois ce qu'il vous plaira.

XXIX.

ROBERVAL A FERMAT.

MARDI 1er JUIN 1638.

(*Va*, p. 154-155.)

Monsieur,

1. Puisqu'il est vrai qu'il n'y a aucun contentement que je préfère à celui que je reçois de vos lettres, vous devez penser que les occupations qui m'ont empêché de vous écrire depuis si longtemps, doivent avoir été bien pressantes, ayant eu la force d'interrompre notre entretien qui m'est si cher et si agréable.

2. Or, pour recommencer, je vous dirai que, si j'ai entrepris la défense de votre Traité [*de minimis et maximis*] contre les objections de

M. Descartes [1], je m'y suis senti obligé ou plutôt nécessité par mon génie, qui ne peut souffrir que la vérité soit tant soit peu obscurcie, tant s'en faut qu'il endure qu'on la fasse passer pour ce qu'elle a de plus contraire, j'entends pour une fausseté accompagnée de paralogismes. C'est pourquoi j'ai grand besoin qu'au lieu de me remercier [2] comme vous faites, vous m'excusiez, tant pource qu'étant foible, j'ai osé entrer en lice contre un fort adversaire pour vous, que pource que je l'ai fait sans vous en avertir, vu que vous sembliez y avoir le principal intérêt. Mais, en effet, c'est l'intérêt de la vérité et de tous ceux qui la chérissent : c'est pourquoi j'en ai fait le mien propre, et elle m'a paru si claire qu'elle m'a fait passer par dessus les considérations de ma foiblesse, à laquelle j'ai pensé que son évidence pourroit suppléer assez suffisamment. J'espère que vous recevrez cette excuse et que vous me ferez l'honneur de croire que la connoissance que j'ai de votre mérite, m'a tellement acquis à vous, qu'elle m'a fait témoigner ce zèle, quoique mon insuffisance seule l'ait pu rendre en quelque sorte indiscret.

3. M. Descartes n'ayant pas encore reçu mon Écrit [3] le 3 mai, ce qui est pourtant bien tard, a fait quelques objections nouvelles de peu de conséquence. Vous les verrez dans sa Lettre [4] que le Père Mersenne vous pourra envoyer.

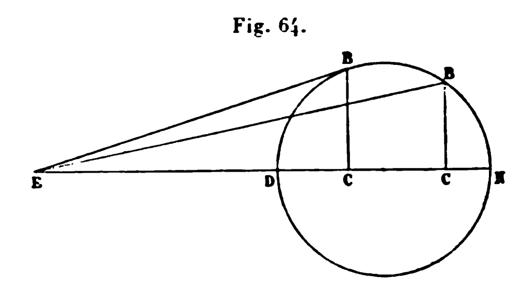
Il veut trouver la tangente d'un cercle, persistant toujours que c'est la plus grande, sinon qu'il y ajoute qu'elle n'est la plus grande que sous certaines conditions : en quoi il s'enferre lui-même, voulant réfuter votre Écrit [5], qui parle de la plus grande absolument, par l'exemple d'une qui n'est la plus grande que conditionairement.

Il est vrai que, voulant la trouver absolument ou la moindre, et, pour ce faire, nommant le diamètre ND (*fig.* 64) C, DE B, et DC ou

(1) *Voir* Lettre XXV.
(2) Dans une Lettre perdue.
(3) *Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III. 58.
(4) Lettre XXVII.
(5) *Methodus ad disquirendam maximam et minimam*, Tome I, p. 133 et suiv.

EC *A*, on tombe dans une absurdité que $C + B$ *bis* est égal à rien : et, si le point E étoit dans le cercle, $C - B$ *bis* seroit égal à rien. Mais cette absurdité montre qu'il ne faut pas chercher le point B dans la circonférence autre part que dans la ligne DN, savoir au point N pour la

Fig. 64.

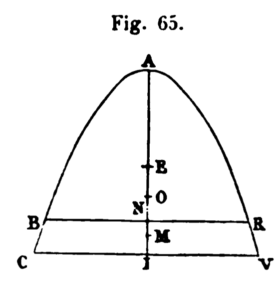


plus grande et au point D pour la moindre : en quoi il est remarquable que $C + B$ *bis* est la somme de la plus grande et de la moindre, et $C - B$ *bis* est leur différence.

Mandez-moi quel est votre sentiment, car, n'ayant pas encore le loisir de considérer bien particulièrement le fonds de votre méthode et sa démonstration, il se peut être qu'elle ne contienne des mystères qui me sont encore cachés.

4. J'ai trouvé admirable le moyen [1] par lequel vous l'appliquez aux paraboles et solides paraboliques pour en trouver les centres;

Fig. 65.



mais, le voulant éprouver en la vraie parabole, j'ai trouvé qu'il falloit changer votre raisonnement qui n'est que particulier au conoïde pa-

(1) *Centrum gravitatis parabolici conoidis*, tome I, p. 136 et suiv. *Voir* Lettre XXV *bis*, 4.

rabolique, car, ayant l'espèce de la ligne EO (*fig.* 65), vous pouvez bien dire :

comme la différence des quarrés IA et AN est au quarré de AN,
ainsi la ligne EO est à OM,

ce que vous ne pouvez pas en la parabole même ([1]), en laquelle, suivant ce raisonnement, il faudroit dire :

comme la différence des cubes de IA et AN est au cube de AN,
ainsi la différence des quarrés de EM et MO est au quarré de MO,

et cependant vous n'avez pas l'espèce ni de l'un ni de l'autre de ces quarrés.

Au lieu desquels j'ai dit ainsi :

il y a plus grande raison du cube IA au cube AN que du quarré EI au quarré OI,

ce qui réussit, et en la parabole cubique j'ai dit :

il y a plus grande raison du quarréquarré IA au quarréquarré AN
que du cube EI au cube OI,

etc.

Mais le raisonnement est autant ou plus beau et plus facile par les figures qui restent, ayant ôté le plan parabolique du parallélogramme qui le comprend.

J'ai promis à M. Mydorge de l'entretenir sur cette invention que je ne saurois assez admirer, et je m'assure que M. Pascal en fera ses exclamations ordinaires, si je puis la lui faire voir, comme j'espère ([2]), et à M. Desargues.

5. Il faut aussi que M. Descartes la voie, afin qu'il nous en fasse voir les paralogismes et, puisque vous avez trouvé les tangentes de sa

([1]) Roberval n'avait pas compris toutes les ressources de la méthode de Fermat.

([2]) Depuis quelque temps, Étienne Pascal avait attiré sur lui la colère de Richelieu et il se cachait, pour éviter une arrestation.

figure (¹), qui est une espèce d'ovale, il sera bon que vous lui envoyez, ou nous, si vous le trouvez meilleur. Mais prenez garde que, par le même point donné, il peut y passer deux de ces ovales et partant y avoir deux tangentes, ce que j'espère que l'équation fera découvrir.

6. J'y travaillerois, mais je suis assuré que vous y réussirez mieux que moi, joint qu'il me faudroit être délivré de la roue à laquelle je suis attaché, ayant appelé du nom de *roue* le cercle qui roule avec les conditions que vous savez (²); et ayant donné un nom à la ligne courbe que décrit un point de la circonférence pendant une révolution entière, je démontre que l'espace compris de cette ligne courbe et de la droite qui lui sert de base, sur laquelle la roue se meut, est *majus dato quam in ratione,* c'est à savoir que, de cet espace en ayant ôté l'espace de la roue, il y aura même raison du reste à la même roue que de la base de l'espace à la moitié de la circonférence de la roue.

D'où il s'ensuit qu'en la roue ordinaire, de laquelle la base est estimée égale à la circonférence, l'espace dont il s'agit est triple de la roue; et si la base est double de la circonférence, l'espace sera quintuple de la roue; si triple, septuple : et ainsi en continuant par les nombres impairs.

De tout ceci je vous envoierai par le premier courrier une brève démonstration, en attendant le Traité entier.

Je suis etc.

(¹) La courbe $x^3+y^3=axy$. — *Voir* Lettre XXV, **6**, et ci-après, pièce XXXI, **3**. — Il faut observer que, pour prendre à la lettre l'énoncé de Descartes et en l'absence de conventions précises sur l'interprétation des signes des coordonnées, Roberval devait rejeter les branches infinies de la courbe, comme ne faisant pas partie du lieu, et, au contraire, y ajouter dans chaque angle autre que celui des coordonnées positives, un *folium* symétrique de celui que forme la courbe dans ce dernier angle. La figure d'ensemble du lieu, figure admise au reste par Descartes lui-même, justifie dès lors le nom de *galand* (nœud de ruban), que lui donna Roberval (*voir*, ci-après, Lettre XXXV). Dans la phrase qui suit, ce dernier semble faire allusion au point double à l'origine.

(²) Conditions de génération des cycloïdes. — *Voir* Lettre XXV *bis*, **7**.

XXX.

FERMAT A MERSENNE (1).

< JUIN 1638 >

(A, f° 27, B, f° 26.)

Mon Révérend Père,

1. J'avois déjà fait un mot d'écrit pour m'expliquer plus clairement à M. Descartes, sur le sujet de ma méthode *de maximis et minimis et de inventione tangentium*, lorsque votre dernière m'a été rendue, qui contient copie de la réplique (2) de M. Descartes. Je ne reste pas de lui envoyer ce que j'avois déjà fait (3), où il trouvera sans doute de quoi se désabuser de la croyance qu'il semble avoir, que j'ai trouvé cette méthode par hasard et que je n'en connois pas les vrais principes.

2. Il a déjà franchi qu'elle est bonne pour les tangentes, en se servant d'une propriété spécifique des lignes courbes, ce qu'il dit < ne > pouvoir être sous-entendu en mon écrit latin; en effet, je n'aurois ni sens commun, ni logique naturelle, si je croyois d'une propriété générale en tirer des particulières. La méthode donc est bonne, au sens auquel je l'emploie pour les tangentes.

Et n'importe de dire qu'il faut faire deux opérations, l'une par $A+E$, l'autre par $A-E$, car une seule suffit pour la construction, quoique la démonstration que je n'ai pas encore donnée, tire son principal fondement de ce que $A+E$ fait la même chose que $A-E$.

(1) Lettre inédite, envoyée à Mersenne avec la Pièce suivante XXXI. Mersenne adressa le tout à Descartes le 20 juillet 1638. D'autre part, cette Lettre XXX fut écrite sur le vu de celle de Descartes à Mersenne, du 3 mai (*ci-avant* XXVII), que le Minime n'adressa à Fermat qu'après le 1er juin (*voir* Lettre XXIX, 3). Les deux Pièces XXX et XXXI sont donc de la fin de juin ou du commencement de juillet 1638.

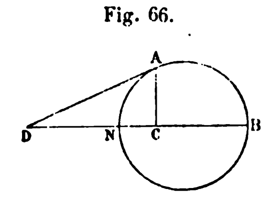
(2) Lettre XXVII.

(3) La Pièce XXXI.

3. Reste de dire un mot de la méthode sur le sujet de l'invention *maximæ et minimæ*, laquelle il prétend être fautive et en allègue l'exemple suivant :

Du point D (*fig.* 66) il faut tirer DA sur le cercle, en telle sorte qu'elle soit la plus grande qui, du point D, puisse être menée au dit

Fig. 66.



cercle sans le franchir (ce qui, en effet, ne veut dire autre chose que chercher la tangente AD).

Si nous prenons CN pour A, et DA pour la plus grande, selon la méthode, nous trouverons une équation impossible, d'où il conclut que la méthode est insuffisante.

Je réponds que je n'ai garde de prendre DA pour la plus grande (bien que la limitation de M. Descartes semble lui pouvoir donner ce nom), d'autant que la méthode, n'agissant que par la propriété spécifique du cercle, en trouve toujours de plus grandes qui peuvent être tirées au dit cercle jusques au point B. Mais la méthode satisfait d'ailleurs à cette question, qui y peut très facilement être réduite, comme M. Descartes a reconnu, et voici comment :

Puisque DA touche le cercle, DA est à AC, perpendiculaire, en moindre proportion qu'aucune autre ligne tirée du point D au cercle, de l'un et de l'autre côté du point A, n'est à la perpendiculaire tirée, du point auquel elle concourt avec le cercle, sur le diamètre; ce qui paroît d'abord.

Cherchons donc par la méthode un point au cercle, comme A, en sorte que DA *ad* AC *habeat minimam proportionem; dabitur punctum* A, *ideoque tangens*.

Voilà la raison de l'opération de M. Descartes, qu'il n'a pas dite,

laquelle confirme la règle tout à fait. Bien loin d'y remarquer des défauts, je crois qu'il y trouvera plus de facilité qu'à la sienne (1)....

XXXI.

MÉTHODE DE MAXIMIS ET MINIMIS

EXPLIQUÉE ET ENVOYÉE PAR M. FERMAT A M. DESCARTES (2).

(A, f^{os} 62 à 67.)

1. La méthode générale pour trouver les tangentes des lignes courbes mérite d'être expliquée plus clairement qu'elle ne semble l'avoir été.

Soit la courbe donnée ZCA (*fig.* 67), de laquelle le diamètre soit CB. Soit encore donné dans la courbe le point A, duquel soit menée l'appliquée AB sur le diamètre. Il faut chercher la tangente AD, de laquelle le concours avec le diamètre prolongé se fait au point D.

Les lignes AB et BC sont données; supposons que BA s'appelle B, et que BC s'appelle D. Supposons que la ligne BD, que nous cherchons, s'appelle A. Prenons à discrétion un point, tel que E, sur la tangente, duquel soit tirée EF parallèle à AB, et supposons que la ligne BF soit E.

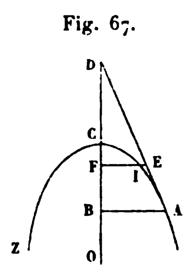
(1) La Lettre est évidemment incomplète. D'après la réponse de Descartes à Mersenne, en date du 27 juillet 1638 (*Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 66, p. 374-375), Fermat y aurait répondu à la question V de Sainte-Croix (*voir* p. 64, note), c'est-à-dire donné le nombre 1 476 304 896, comme quatrième connu dont le double soit égal à la somme de ses parties aliquotes. Descartes ajoute :

« ... il met un peu devant, touchant la quatrième question de M. de Sainte-Croix (*voir* p. 29, note 2), que j'aurai peut-être fait la même équivoque, qui lui arriva la première fois qu'elle lui fut proposée, et que j'aurai cru qu'il suffisoit que les nombres cherchés ne fussent ni quarrés, ni composés de deux quarrés, bien qu'ils fussent composés de quatre, ce qui n'est pas pourtant selon le sens de l'auteur etc. »

(2) Pièce jointe à la précédente (*voir* page 152, note 1). — Elle a été publiée par M. Charles Henry dans ses *Recherches sur les manuscrits de Pierre de Fermat* (pages 184 à 189), d'après le brouillon d'Arbogast. Celui-ci ne l'a connue que par une copie de Mersenne, aujourd'hui perdue.

Donc CF sera $D - E$, FE sera $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } E}{A}$, et, de quelque nature que soit la courbe, nous donnerons toujours les mêmes noms aux lignes CF et FE que nous venons de leur donner.

Fig. 67.



Cela étant fait, il est certain que le point E de la ligne EF, étant dans la tangente, sera hors de la courbe, et, par conséquent, la ligne EF sera plus grande ou plus petite que l'appliquée qui s'appuie à la courbe du point F : — plus grande, lorsque la courbe est convexe en dehors, comme en cet exemple, et plus petite, lorsque la courbe est convexe en dedans; car la règle satisfait à toutes sortes de lignes et détermine même, par la propriété de la courbe, de quel côté elle est convexe. — Quoique la ligne FE soit inégale à l'appliquée tirée du point F à la courbe, je la considère néanmoins comme si en effet elle étoit égale à l'appliquée, et en suite la compare par *adéquation* avec la ligne FI, suivant la propriété spécifique de la courbe.

2. Comme, en la parabole, par exemple, je fais

comme BC à CF, ainsi BA quarré à FE quarré,

ou bien, pour éviter les fractions et la diversité des lignes,

comme BC à CF, ainsi BD quarré à DF quarré;

car c'est toujours la même chose, à cause des deux triangles semblables DBA, DFE.

Ou bien encore je pourrois comparer le quarré FE avec le rectangle compris sous le côté droit et la ligne CF, comme si ce quarré étoit égal à ce rectangle, quoique en effet il ne le soit pas, puisque ce sont seule-

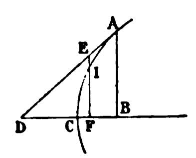
ment les appliquées à la courbe qui ont la propriété que nous donnons par *adéquation* à la ligne FE.

Cela étant fait, j'ôte les choses communes et divise le reste par E. J'efface tout ce qui reste mêlé avec E et égalise le surplus, de sorte que, par cette dernière équation, je connois la valeur de A et par conséquent la ligne BD et la tangente.

3. Et pour faire voir que la méthode est générale, et qu'elle satisfait avec pareille facilité à toutes sortes de questions, nous la pouvons appliquer, pour servir d'un second exemple, à la ligne courbe proposée par M. Descartes (¹).

Soit la courbe CA (fig. 68), *de laquelle la propriété est telle que, quelque point qu'on prenne sur la dite courbe, comme* A, *tirant la perpendiculaire* AB, *les deux cubes* CB *et* BA *soient égaux au parallélépipède compris sous une ligne droite donnée, comme* N, *et sous les deux lignes* CB *et* BA.

Fig. 68.



Supposons que la chose soit déjà faite, et une construction pareille à la précédente, avec les noms des lignes BD, BC, BA, CF, FE. Il faudra comparer, par *adéquation*, les deux cubes CF, FE avec le solide compris sous N, FC, FE.

Les deux cubes de CF, FE sont en notes

$$D\,cub. - E\,cub. - Dq.\ \text{in}\ E.3 + D\ \text{in}\ Eq.3$$

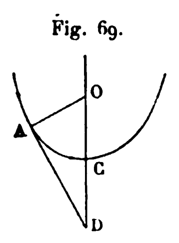
$$+\frac{B\,cub.\ \text{in}\ A\,cub. - B\,cub.\ \text{in}\ E\,cub. - B\,cub.\ \text{in}\ Aq.\ \text{in}\ E.3 + B\,cub.\ \text{in}\ A\ \text{in}\ Eq.3}{A\,cub.};$$

(¹) *Voir* Lettre XXV, 6.

leurs, quelle est la proportion des deux lignes *B* et *D*, ou bien BA et BC, données. Car il peut arriver que quelquefois, suivant la diversité des proportions de *B* et de *D*, la ligne courbe sera convexe et d'autres fois concave; quelquefois encore que la tangente sera parallèle au diamètre BC; quelquefois enfin que le concours avec le diamètre se fera de l'autre côté, ce qui se détermine aisément par la méthode même, lorsqu'on nous donne la proportion des deux lignes données BA et BC, comme il est très aisé de voir et de faire comprendre. Lorsque je parle de la proportion des deux lignes données, j'entends leurs valeurs, *en nombres ou sourds ou rationaux;* car autrement on sait assez que, deux lignes étant données, leur proportion est aussi donnée.

4. Il paraît donc que ou je me suis mal expliqué ou que M. Descartes a mal compris mon Écrit latin [1]; s'il veut que ce soit le premier, je ne le lui contesterai guère. Il s'est aussi trompé en ce qu'il a cru que, pour appliquer la méthode *de maximis et minimis* à l'invention des tangentes, il falloit chercher une ligne, comme AD (*fig.* 69), menée,

Fig. 69.



du point A donné, sur le diamètre, en telle sorte que AD soit la plus grande qui puisse être tirée du point D à la courbe. M. de Roberval [2] lui a déjà fait voir la raison de son mécompte, duquel il a voulu tirer cette conséquence, que la méthode *de maximis et minimis* étoit fautive et avoit besoin d'être corrigée, en quoi il s'est aussi bien trompé qu'au reste.

5. Mais pour lui marquer de quelle façon la méthode *de maximis et minimis* peut être appliquée à l'invention des tangentes, la voici :

(1) *Methodus ad disquirendam maximam et minimam,* Tome I, page 133.
(2) *Lettres de Descartes,* éd. Clerselier, III, 58.

Le point A étant donné, il faut avoir recours, non pas *ad maximam*, puisqu'on ne trouveroit que l'infini, mais *ad minimam*. Cherchons donc le point O dans le diamètre, de telle façon que la ligne OA soit la plus courte qui puisse être tirée du point O à la courbe. Le point O étant trouvé par la méthode, joignez les deux points O et A par la ligne OA, et tirez la ligne AD perpendiculaire sur OA. Je dis que la ligne AD touchera la courbe, <ce> dont la démonstration est aisée.

Car si AD ne touchoit pas la courbe, une autre droite la toucheroit au point A, laquelle fera son concours au dessus ou au dessous de D, et tous ses points seront hors de la courbe, et elle fera des angles inégaux avec OA au point A. Si donc, sur cette touchante supposée, du point O l'on tire une perpendiculaire, elle ne rencontrera pas la touchante au point A, mais au dessus ou au dessous, et elle coupera la courbe plus tôt que d'arriver à la touchante. Donc la partie de cette perpendiculaire comprise entre le point O et la courbe sera plus courte que la perpendiculaire, et la perpendiculaire étant plus courte que OA, à cause de l'angle droit, il s'ensuivra que la ligne comprise entre la courbe et le point O, faisant partie de la perpendiculaire, sera plus courte que OA, laquelle pourtant nous supposons la plus courte de toutes celles qui du point O peuvent être menées à la courbe.

Que si la ligne CA (*fig.* 70) est convexe en dehors, soit la tan-

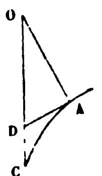


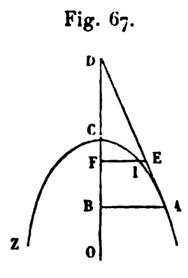
Fig. 70.

gente DA sur laquelle soit tirée la perpendiculaire AO. Il paroit par la construction que AO est la plus courte de toutes celles qui du point O sont menées à la courbe, de sorte qu'en cherchant le point O, le point A étant donné, on trouve aisément la tangente.

6. Il reste donc de chercher le point O par la méthode.

Soit par exemple la parabole donnée CIA (fig. 67) *sur laquelle le point* A *soit donné. Je veux chercher le point* O, *en sorte que* OA *soit la plus courte de toutes celles qui du point* O *peuvent être menées à la parabole.*

Fig. 67.



BC, comme ci-devant, s'appellera D, et BA s'appellera B, le côté droit de la figure, Z, donné, puisque la parabole est donnée. Supposons que OB soit A. Donc le quarré OA en notes sera $Aq. + Bq.$

Prenons maintenant, au lieu de la ligne A ou OB, OF ou $A + E$. Si du point F nous menons l'appliquée FI, son quarré sera en notes

$$Z \text{ in } D - Z \text{ in } E,$$

lequel, ajouté au quarré de OF, fera

$$Aq. + Eq. + A \text{ in } E \text{ bis} + Z \text{ in } D - Z \text{ in } E,$$

et cette somme fera le quarré de OI, lequel doit être plus grand que celui de OA, puisque son côté est supposé plus grand que OA. Comparons donc en notes, par adéquation, les quarrés OI et OA.

Nous aurons d'un côté

$$Aq. + Bq.,$$

et de l'autre

$$Aq. + Eq. + A \text{ in } E \text{ bis} + Z \text{ in } D - Z \text{ in } E.$$

Otons les choses communes; la comparaison restera entre

$$Eq. + A \text{ in } E \text{ bis}$$

d'un côté, et

$$Z \text{ in } E$$

de l'autre; car $Bq.$ est égal, par la propriété de la parabole, à $Z \text{ in } D$.

Divisons le tout par E, et du reste ôtons le même E :

$$A \text{ bis sera égal à } Z,$$

et partant A ou OB sera égal à la moitié du côté droit de la parabole, et la tangente est trouvée.

7. C'est ainsi que j'appliquois ma méthode pour trouver les tangentes, mais je reconnus qu'elle avoit son manquement, à cause que la ligne OI ou son quarré sont d'ordinaire malaisés à trouver par cette voie; la raison est prise des asymmétries qui s'y rencontrent aux questions tant soit peu difficiles, et qu'on ne peut éviter, puisque, sur $D - E$ en notes, il faut donner un nom à FI aussi en notes, ce qui est souvent très malaisé.

La méthode de M. Descartes n'ôte pas non plus tous les inconvénients, car obligeant à mettre $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu de x, et le quarré de cette somme au lieu de xx, et son cube au lieu de x^3, et ainsi des autres, — c'est ainsi qu'il parle (1) page 342, — si on lui propose de trouver la tangente à une courbe, en sorte que, faisant en sa figure MA égal à y et CM à x, on ait l'équation suivante qui explique le rapport qui est entre x et y,

$$by^9 + b^3y^7 + b^5y^5 + b^7y^3 + b^9y \propto x^{10} - dx^9 - d^3x^7 - d^5x^5 - d^7x^3 - d^9x,$$

il me semble qu'il lui sera très malaisé de se desembarrasser des asymmétries qui se rencontrent en cette question et autres semblables et plus difficiles encore, si on veut, à l'infini; ce que je serai bien aise qu'il prenne la peine d'essayer.

8. Puisque donc ces deux méthodes paroissent insuffisantes, il en falloit trouver une qui levât toutes ces difficultés.

Il me semble avec raison que c'est la première que j'ai proposée, car CF restant toujours $D - E$, et FE, $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } E}{A}$, je ne vois rien qui

(1) *Géometrie de Descartes*, éd. Hermann. Paris, 1886, page 33, au bas. — Dans la figure, A est le sommet d'une courbe, AM l'abscisse, MC l'ordonnée courante; Fermat note d'ailleurs exactement les coordonnées comme l'avait fait Descartes.

empêche qu'on ne puisse le comparer, en prenant, si vous voulez, $D - E$ pour y et $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } E}{A}$ pour x, sans rencontrer jamais une seule asymmétrie, en quoi consiste la facilité et la perfection de cette méthode.

9. On pourroit ensuite chercher la converse de cette proposition et, la propriété de la tangente étant donnée, chercher la courbe à qui cette propriété doit convenir : à laquelle question aboutissent celles des verres brûlants proposées par M. Descartes. Mais cela mérite un discours à part et, s'il l'agrée, nous en conférerons quand il lui plaira. Je desire seulement qu'il sache que nos questions *de maximis et minimis* et *de tangentibus linearum curvarum* sont parfaites depuis huit ou dix ans et que plusieurs personnes qui les ont vues depuis cinq ou six ans le peuvent témoigner.

S'il desire voir l'application [1] que je fais de cette même méthode pour trouver les centres de gravité des espaces compris des lignes courbes et de leurs solides, je la lui ferai voir et lui proposerai cependant, s'il l'agrée, de *trouver le centre de gravité du conoïde qui se fait lorsque la demie parabole* CBA *est tournée sur son appliquée* BA, *et celui aussi de toutes ses portions, comme aussi la proportion qu'elles ont aux cônes de même base et de même hauteur* [2].

(1) *Centrum parabolici conoidis*, Tome I, p. 136.
(2) *Voir* Lettres IX, 7; XIII, 6; XV, 5.

XXXII.

DESCARTES A FERMAT [1].

MARDI 27 JUILLET 1638.

(D. III, 63.)

MONSIEUR,

Je n'ai pas eu moins de joie de recevoir la Lettre [2] par laquelle vous me faites la faveur de me promettre votre amitié, que si elle me venoit de la part d'une maîtresse dont j'aurois passionnément desiré les bonnes grâces : et vos autres écrits qui ont précédé me font souvenir de la Bradamante de nos poëtes [3], laquelle ne vouloit recevoir personne pour serviteur qui ne se fût auparavant éprouvé contre elle au combat.

Ce n'est pas toutefois que je prétende me comparer à ce Roger qui étoit seul au monde capable de lui résister; mais, tel que je suis, je vous assure que j'honore extrêmement votre mérite. Et voyant la dernière façon [4] dont vous usez pour trouver les tangentes des lignes courbes, je n'ai autre chose à y répondre, sinon qu'elle est très bonne et que, si vous l'eussiez expliquée au commencement en cette façon, je n'y eusse point du tout contredit.

Ce n'est pas qu'on ne pût proposer divers cas qui obligeroient à chercher derechef d'autres biais pour les démêler, mais je ne doute point que vous ne les trouvassiez aussi bien que celui-là.

Il est vrai que je ne vois pas encore pour quelle raison vous voulez

(1) Lettre adressée par l'intermédiaire de Mersenne, en même temps que celle de Descartes au Minime de la même date (Clerselier, III, 66), dont l'original (Bibl. Nat. fr. n. a. 5160, f° 14 V°) porte en marge ces mots :

« Je vous enuoye ma lettre pour M. de Fermat toute ouuerte, mais vous la fermerez s'il vous plaist auant que de lui enuoyer pour la bienseance. »

(2) Lettre perdue.

(3) Expression quelque peu singulière, puisque Bradamante et Roger appartiennent à l'*Orlando inamorato* de Berni et à l'*Orlando furioso* de l'Arioste.

(4) *Voir* Pièce XXXI.

que votre première règle, pour chercher les plus grandes et les moindres, se puisse appliquer à l'invention de la tangente, en considérant la ligne qui la coupe à angles droits comme la plus courte, plutôt qu'en considérant cette tangente comme la plus grande, sous les conditions qui la rendent telle.

Car, pendant qu'on ne dit point la cause pourquoi elle réussit en l'une de ces façons plutôt qu'en l'autre, il ne sert de rien de dire que cela arrive, sinon pour faire inférer de là que, même lorsqu'elle réussit, elle est incertaine. Et, en effet, il est impossible de comprendre tous les cas qui peuvent être proposés dans les termes d'une seule règle, si on ne se réserve la liberté d'y changer quelque chose aux occasions, ainsi que j'ai fait en ce que j'en ai écrit, où je ne me suis assujetti aux termes d'aucune règle, mais j'ai seulement expliqué le fondement de mon procédé et en ai donné quelques exemples, afin que chacun l'appliquât après, selon son adresse, aux divers cas qui se présenteroient.

Cependant je m'écarte ici, sans y penser, du dessein de cette Lettre, lequel n'est autre que de vous rendre grâces très humbles de l'offre qu'il vous a plu me faire de votre amitié, laquelle je tâcherai de mériter, en recherchant les occasions de vous témoigner que je suis passionnément, etc.

XXXIII.

FERMAT A MERSENNE.

MARDI 10 AOUT 1638.

(A, f^{os} 21-22, B, f^{o} 24 v^{o}.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Je ne vous écris à ce coup que pour vous remercier très humblement de la peine que vous prenez à me faire part des curiosités qui tombent en vos mains.

Je vous renvoie votre Écrit Harmonique (1), duquel je vous dirai une autre fois pleinement mes sentiments.

Maintenant je me trouve sur le point d'aller à la campagne, pour une commission de ma charge, d'où je n'aurai nulle commodité pour vous écrire, de quoi je vous demande pardon par avance, vous conjurant de ne rester pas pour cela de m'écrire par tous les courriers; car j'ai baillé ordre pour faire que vos lettres me soient rendues, lesquelles vous mettrez au bureau en la forme ordinaire.

2. J'attends surtout avec impatience de voir rétracter M. Descartes du jugement qu'il avoit fait de ma méthode, et de l'impossibilité qu'il s'étoit figuré qu'elle avoit, pour résoudre la question de sa figure, de laquelle, sans doute, il a maintenant vu les tangentes (2).

3. Vous direz, s'il vous plaît, à M. de Roberval, que j'ai trouvé celle (3) qui lui manquoit pour les connoître toutes, et que je satisferai à ses autres questions à mon retour.

4. Pour les nombres dès parties aliquotes (4), si j'ai loisir, je mettrai par écrit ma méthode analytique sur ce sujet et vous en ferai part. Je trouve que M. Frenicle se tient fort caché et ne veut pas découvrir son artifice. Je n'en fais pas de même, car vous savez assez avec quelle liberté j'étale toutes mes pensées.

(1) Les Lettres qui suivent ne renferment rien au sujet de cet Écrit Harmonique, qui devait être, non pas de Mersenne, mais d'un de ses correspondants, peut-être Bannius, de Harlem (*Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 68, p. 393), peut-être Gandais (*ibid.*, II, 97, p. 438).

(2) *Voir* Pièce XXXI, 3. — Fermat n'a pas encore reçu la lettre de Descartes, XXXII.

(3) *Voir* Lettre XXXV, 2.

(4) *Voir* page 154, note 1. — Dès le 1er mai 1638 (*Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 68, p. 392), Mersenne avait demandé à Descartes une règle pour trouver des nombres ayant un rapport donné avec la somme de leurs parties aliquotes. Le 13 juillet (*ibid.*, II, 89, p. 388), Descartes avait envoyé au Minime sept nombres satisfaisant à cette condition pour les rapports $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{4}$. Frenicle fit faire à ce sujet une Communication à Descartes (*ibid.*, II, 92, Lettre de Descartes à Mersenne du 15 novembre 1638, p. 408-409), et lui adressa ensuite directement une Lettre, à laquelle Descartes répondit (*ibid.*, II, 95).

5. Je lirai le Galilei (1) en mon voyage, à quoi je n'ai pu encore vaquer, à cause des occupations de la fin du Parlement. Souvenez-vous de m'écrire, bien que vous ne receviez pas de mes lettres, et croyez-moi, mon Révérend Père,

Votre très humble serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 10 août 1638.

< *P.-S.* > 6. En relisant une de vos Lettres, j'ai trouvé que vous me demandiez ma pensée sur la question 25 des *Méchaniques* d'Aristote (2). Si vous cherchez parmi vos papiers, vous trouverez que je vous l'ai envoyée, il y a longtemps, tout au long.

7. Pour les centres de gravité, il y a plus de deux ans que je les ai envoyés à M. de Roberval, des figures mêmes auxquelles M. Descartes (3) dit les avoir trouvés et desquelles on peut dériver tous les autres.

Car celui de la parabole quarrée, qui est l'ordinaire, divise l'axe en deux parties qui sont

comme 3 à 2;

la cubique,

comme 4 à 3;

(1) Les *Discorsi* imprimés à Leyde en 1638. *Voir* page 112, note 1.

(2) « On demande pourquoi deux cercles, l'un plus grand, l'autre plus petit, placés » concentriquement, parcourent des longueurs égales lorsqu'on les fait rouler ensemble, » tandis que les longueurs parcourues par les cercles roulant isolément sont dans le rap- » port de grandeur (des diamètres) des deux cercles; pourquoi, d'autre part, quand ils » sont adaptés concentriquement, la longueur parcourue dans le roulement est égale » tantôt à celle que parcourrait le petit cercle roulant seul, tantôt à celle que parcourrait » le grand cercle. »

Dans les explications qu'il donne à ce sujet, Aristote admet que la longueur parcourue par un cercle qui roule est, après un tour complet, égale à la circonférence de ce cercle; mais il n'arrive pas à définir cinétiquement le glissement, et fait intervenir des considérations dynamiques qui sont en réalité étrangères à la question.

(3) *Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, II, 89, Lettre à Mersenne du 13 juillet 1638, pages 386-387. — Fermat avait énoncé la règle générale, pour trouver le centre de gravité d'une aire de parabole de degré quelconque, dans sa Lettre à Roberval du 4 novembre 1636 (*voir* XV, **5**).

a quarréquarrée,

comme 5 à 4;

la sursolide,

comme 6 à 5,

et ainsi à l'infini.

Et ce que vous trouverez de plus merveilleux, c'est que ces questions se trouvent par ma méthode *de maximis et minimis* (¹), comme M. de Roberval vous fera voir, et à M. Descartes.

XXXIV.

DESCARTES A FERMAT (²).

< LUNDI 11 OCTOBRE 1638 >

(D, III, 64).

MONSIEUR,

1. Je sais bien que mon approbation n'est point nécessaire pour vous faire juger quelle opinion vous devez avoir de vous-même, mais si elle y peut contribuer quelque chose, ainsi que vous me faites l'honneur de m'écrire (³), je pense être obligé de vous avouer ici franchement que je n'ai jamais connu personne qui m'ait fait paroître qu'il sût tant que vous en Géométrie.

2. La tangente de la ligne courbe que décrit le mouvement d'une roulette, qui est la dernière chose que le Révérend Père Mersenne a pris la peine de me communiquer de votre part, en est une preuve très assurée. Car, d'autant qu'elle semble dépendre du rapport qui est

(¹) *Voir* l'Écrit *Centrum gravitatis parabolici conoidis*, Tome I, page 136.

(²) Dans une Lettre à Mersenne du 15 novembre 1638, Descartes (éd. Clerselier, II, 92, p. 406-407) dit lui avoir adressé une Lettre pour Fermat cinq semaines auparavant, dans un paquet qui devait arriver à Paris environ la mi-octobre. Il s'agit évidemment de celle-ci, qui a donc été mal datée du 25 septembre par l'annotateur anonyme de l'exemplaire de l'Institut.

(³) Dans une Lettre perdue.

entre une ligne droite et une circulaire, il n'est pas aisé d'y appliquer les règles qui servent aux autres, et M. de Roberval qui l'avoit proposée, qui est sans doute aussi l'un des premiers géomètres de notre siècle, confessoit ne la savoir pas et même ne connoitre aucun moyen pour y parvenir [1].

Il est vrai que depuis il a dit aussi qu'il l'avoit trouvée, mais ç'a été justement le lendemain, après avoir su que vous et moi <la> lui envoyions, et une marque certaine qu'il se mécomptoit est qu'il disoit avoir trouvé en même temps que votre construction étoit fausse, lorsque la base de la courbe étoit plus ou moins grande que la circonférence du cercle : ce qu'il eût pu dire tout de même de la mienne, sinon qu'il ne l'avoit pas encore vue, car elle s'accorde entièrement avec la vôtre [2].

3. Au reste, Monsieur, je vous prie de croire que, si j'ai témoigné ci-devant n'approuver pas tout-à-fait certaines choses particulières qui venoient de vous, cela n'empêche point que la déclaration que je viens de faire ne soit très vraie. Mais comme on remarque plus soigneusement les petites pailles des diamans que les plus grandes taches des pierres communes, ainsi j'ai cru devoir regarder de plus près à ce qui venoit de votre part que s'il fût venu d'une personne moins estimée.

Et je ne craindrai pas de vous dire que cette même raison me console, lorsque je vois que de bons esprits s'étudient à reprendre les choses que j'ai écrites, en sorte qu'au lieu de leur en savoir mauvais gré, je pense être obligé de les en remercier. Ce qui peut, ce me semble, servir à vous assurer que c'est véritablement et sans fiction que je suis, etc.

[1] *Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 65, p. 350. — Dans cette Lettre à Mersenne, du 23 août 1638, Descartes donne, pour la tangente en un point donné d'une cycloïde ordinaire, allongée ou raccourcie, la construction fondée sur la considération du centre instantané de rotation.

[2] Cp. *Lettres de Descartes*, II, 91, p. 400-401. — La construction de Fermat, pour la tangente à la cycloïde, fut envoyée par Mersenne à Descartes le 11 septembre 1638. — *Voir*, pour cette construction, Tome I, p. 163.

XXXV.

FERMAT A MERSENNE.

VENDREDI 22 OCTOBRE 1638.

(A, f^{os} 39-44; B, f^{os} 10ro-12ro.)

..... 1. Je reprends le style géométrique après vous avoir parlé d'affaires (1).

Premièrement, je vous renvoie le sentiment de M. Descartes sur la Géostatique (2), et vous conjure de me faire part de tout ce que vous avez de lui.

2. Après cela, je satisferai à la question de la *tangente du galand parallèle à l'axe* (3), c'est-à-dire qui fasse un angle de 45 degrés avec la droite donnée par position.

Pour satisfaire à cette question, qui semble d'abord malaisée et qui l'a paru à M. de Roberval, car je n'ai pas encore vu la solution de M. Descartes (4), je me suis servi de la méthode de mon *Appendix ad locos* (5), de laquelle l'usage en plusieurs rencontres est miraculeux, pour éviter les asymmétries et cette longueur d'équations qui semblent ne devoir jamais prendre fin.

Soit donné le galand NSQR (*fig.* 71), la droite donnée par position DNOP, et la ligne Z donnée de grandeur.

La propriété du galand est que, quel point que vous preniez, comme

(1) Le commencement de cette Lettre inédite est perdu.

(2) La Lettre de Descartes à Mersenne (éd. Clerselier, I, 73) du 13 juillet 1638 : Examen de la question, savoir si un corps pèse plus ou moins, étant proche du centre de la terre, qu'en étant éloigné.

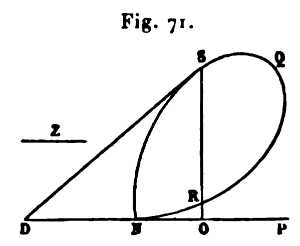
(3) *Voir* Lettre XXXIII, 3. — C'était Roberval qui avait posé cette question, après avoir donné le nom de *galand* (nœud de ruban) à la courbe proposée par Descartes et dont il avait étudié la forme.

(4) Cette solution se trouve dans la Lettre de Descartes à Mersenne du 23 août 1638 (éd. Clerselier, III, 65, p. 354-357). *Comparez* la Lettre du 15 novembre (Clerselier, II, 92; Cousin, VIII, p. 6).

(5) Tome I, page 103-110.

S ou R, le solide sous Z *in* NO *in* OS est égal aux deux cubes NO et OS; ou bien le solide sous Z *in* NO *in* OR est égal aux deux cubes NO et OR. Il faut trouver la tangente SD, par exemple du côté d'en haut, qui fasse l'angle SDO égal à la moitié d'un droit.

Fig. 71.



Soit fait. Par ma méthode des tangentes (1), si NO est appelée D, et OS, B, la ligne OD sera égale à

$$\frac{B\,cub.\ \text{bis} - D\,cub.}{Z\ \text{in}\ B - Dq.\ \text{ter}},$$

et si la tangente étoit du côté d'en bas, la ligne OD seroit égale à

$$\frac{D\,cub. - B\,cub.\ \text{bis}}{Dq.\ \text{ter} - Z\ \text{in}\ B}.$$

Mais nous n'avons besoin que de la première équation, puisque nous ne travaillons qu'au premier cas.

Supposons que NO, inconnue, s'appelle A, et que OS s'appelle E, nous aurons, pour la ligne OD,

$$\frac{E\,cub.\ \text{bis} - A\,cub.}{Z\ \text{in}\ E - Aq.\ \text{ter}}.$$

Or, puisque l'angle D est demi-droit et que l'angle O est droit, les lignes OD et OS seront égales; il faudra donc que

$$\frac{E\,cub.\ \text{bis} - A\,cub.}{Z\ \text{in}\ E - Aq.\ \text{ter}}\ \text{soit égal à}\ E,$$

et, par conséquent,

$$E\,cub.\ \text{bis} - A\,cub.\quad \text{sera égal à}\quad Z\ \text{in}\ Eq. - Aq.\ \text{in}\ E\ \text{ter}.$$

(1) *Voir* Pièce XXXI, 3.

Or, par la propriété de la ligne,

$$A\ cub.\ \text{est égal à}\ Z\ \text{in}\ A\ \text{in}\ E - E\ cub.$$

Nous aurons donc [1]

$$E\ cub. - Z\ \text{in}\ A\ \text{in}\ E\ \text{égal à}\ Z\ \text{in}\ Eq. - Aq.\ \text{in}\ E\ \text{ter}.$$

Divisons le tout par E, nous aurons

$$Eq. - Z\ \text{in}\ A\ \text{égal à}\ Z\ \text{in}\ E - Aq.\ \text{ter},$$

et enfin

$$Eq. - Z\ \text{in}\ E\ \text{égal à}\ Z\ \text{in}\ A - Aq.\ \text{ter}.$$

Et partant, nous avons un lieu elliptique, et le point S est *ad ellipsin positione datam; sed est etiam ad curvam positione datam. Ergo datur* par l'intersection de ces deux lieux et par ma méthode topique [2].

Par la même facilité on fera la résolution du second cas. Mais, pour rendre la proposition générale, vous pourrez, par la même méthode, faire l'angle D égal à tel angle que vous voudrez, ou bien, ce qui est la même chose, faire que la ligne DO soit à la ligne OS en proportion donnée.

En voilà, à mon avis, assez pour vous témoigner que je ne tiens pas caché ce que je sais.

3. Pour *la tangente de la roulette* [3], bien loin d'en faire un mystère, je vous veux faire comprendre qu'il n'y a point de question de cette matière qui puisse m'échapper. Vous saurez donc que cette même méthode dont je me sers pour les tangentes des lignes courbes, lorsque leurs appliquées ou les portions de leur diamètre ont relation à des

[1] Fermat commet ici une faute de calcul. Les premiers termes des équations suivantes devraient être *E cub.* ter; *Eq.* ter; *Eq.* ter. Le lieu est donc un cercle et non un ellipse.

[2] *Voir* plus loin **9**, une seconde solution, également imparfaite. Fermat n'a pas reconnu, comme l'avait fait Descartes, que le problème particulier est plan; il n'avait, semble-t-il, cherché que des méthodes générales.

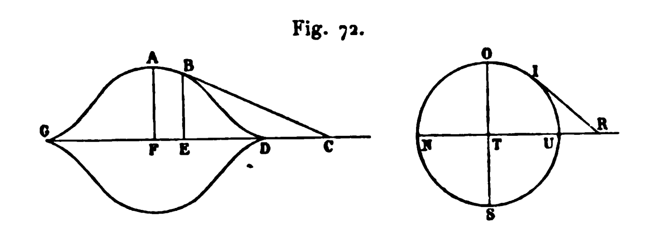
[3] *Voir* Lettre XXXIV, **2**.

lignes droites, me sert aussi, avec un peu de changement pris de la nature de la chose, à trouver les tangentes des courbes dont les appliquées ou les portions de leur diamètre ont relation à d'autres courbes.

4. Je vous en ai déjà fait voir l'exemple en la roulette. En voici un autre *en l'ovale* (¹) *de laquelle le sphéroïde est au cylindre circonscrit comme le double du diamètre à la circonférence du cercle*, laquelle j'envoyai dernièrement à M. de Roberval.

Soit l'ovale GABD (*fig.* 72) et l'axe GD autour duquel se décrit le

Fig. 72.



sphéroïde. Soit le cercle NOIS, coupé à angles droits par les deux diamètres OS et NU, duquel la circonférence soit double de l'axe GD, en sorte que le quart OU soit égal au demi-axe FD. Soit le point B en l'ovale, duquel il faut tirer la tangente.

Tirons la perpendiculaire BE et faisons la portion du quart OI égale à FE; tirons au cercle la tangente IR qui coupe le diamètre NU au point R. Faisons EC, en l'ovale, double de IR. La ligne BC touchera l'ovale.

5. En voici un autre exemple :

Soit la parabole EDAG (*fig.* 73), de laquelle l'axe AG et le sommet A. *Soit une autre courbe* ABF *de même axe et sommet, et que* BC, *appliquée, soit égale à la portion de parabole* DA, *et l'appliquée* FG *égale à la portion de parabole* EA, *etc., à l'infini*. Il faut trouver, au point B de cette nouvelle courbe, une tangente.

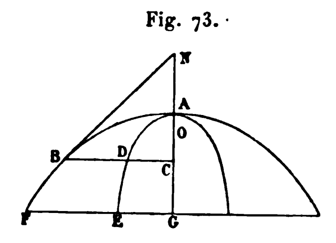
(¹) Cette courbe, évidemment imaginée par Fermat, a pour équation rapportée aux axes FA, FD : $y = a\sqrt{\cos\frac{x}{b}}$, b étant le rayon du cercle auxiliaire NOIS.

Soit tirée l'appliquée BDC. Soit O le *focus* de la parabole. Faisons

comme OA + AC à AC, ainsi le quarré BC au quarré CN.

La ligne BN touchera la courbe FBA.

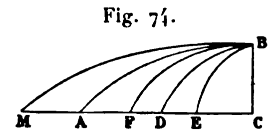
Fig. 73.



6. Voilà deux exemples aisés, lesquels vous pourrez proposer à soudre, si vous voulez, avant que de faire voir les solutions. Mais, pour le suivant, je le propose à M. de Roberval et encore, si j'osois, à M. Descartes :

Soient autant de courbes que l'on voudra de même sommet B (fig. 74), *comme* BE, BD, BF, BA, *données par position, et soit marquée une autre*

Fig. 74.



courbe de même sommet, comme MB, *en sorte que les appliquées de cette dernière, comme* MC, *soient moyennes proportionnelles entre la somme des portions des autres courbes*, AB, BF, BD, BE, *et la somme des appliquées* AC, FC, DC, EC. *Il faut trouver une tangente à un point donné de cette dernière courbe.*

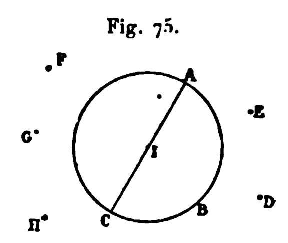
Si vous voulez que les quatre courbes de mon exemple soient un cercle, une parabole, une hyperbole et une ellipse, j'y consens, à la charge que vous croyiez que je donnerai la solution en tout nombre et en toute espèce de courbes données, et ce sans aucune asymmétrie, ce qui semble merveilleux.

7. Avant que de quitter la Géométrie, je vous donne encore une spé-

culation qui semble être excellente et qui allonge infiniment l'étrivière au lieu plan : *Si a quotcumque punctis* (¹), laquelle j'ai trouvée en cherchant les lieux *ad superficiem* (²) :

C'est que, après avoir trouvé un cercle qui satisfasse à la question d'Apollonius *in plano*, comme par exemple : *Soient* (fig. 75) *les points*

Fig. 75.



donnés F, G, H, E, D *et le cercle trouvé* ABC *en sorte que, quel point que vous preniez en sa superficie, comme* A, *les quarrés* FA, GA, HA, DA, EA *soient égaux à un espace donné*, je dis que : *Si autour du point* I *comme centre, vous décrivez une sphère de laquelle le cercle* ABC *soit un des grands, quel point que vous preniez en la superficie de la sphère, il satisfera à la question du lieu.*

J'ai trouvé ensuite beaucoup de choses merveilleuses sur le sujet des lieux *ad superficiem*, mais je ne puis pas vous dire tout à la fois.

8. Le quadrilatère (³) de M. de Roberval, que je n'ai pas cru si pressé que la tangente du galand, sera différé au premier voyage.

9. Il faut que je vous die encore qu'on peut trouver la tangente de 45 degrés au galand (⁴) par une voie qui semble plus géométrique. Car, là où ma précédente solution a employé la ligne courbe du galand pour trouver le point cherché par l'intersection du galand et d'une ellipse, cette autre voie n'emploie que les sections coniques.

(¹) *Voir* Lettre XIX, **1**.

(²) *Comparer* Tome I, p. 113.

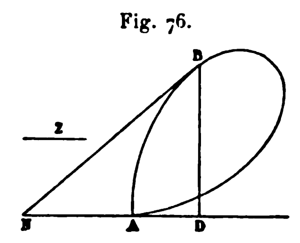
(³) Problème proposé à Descartes par Mersenne, comme n'ayant pas été résolu par Roberval (*Lettres de Descartes*, éd. Clerselier, III, 65, du 23 août 1638; p. 357) :

« Les côtés AD et AE du quadrilatère ADCE étant donnés avec l'angle DAE et la longueur de la diagonale AC, et enfin la proportion qui est entre les deux lignes AG et AH, perpendiculaires sur les côtés inconnus CD et CE, il faut chercher le reste. »

(⁴) *Voir* plus haut, **2**.

Supposons que Z (*fig.* 76), le côté droit du galand, est inconnu, et

Fig. 76.



que AD est une ligne donnée nommée B, que DB est inconnue, nommée A. Donc le côté droit sera

$$\frac{A\ cub. + B\ cub.}{B \text{ in } A}.$$

Par ma méthode des tangentes, la ligne DN qui concourt avec la tangente sera

$$\frac{B \text{ in } A\ cub. \text{ bis} - Bqq.}{A\ cub. - B\ cub. \text{ bis}},$$

laquelle il faut faire égale à A. Nous aurons donc

$$Aqq. - B\ cub. \text{ in } A \text{ bis} \quad \text{égal à} \quad B \text{ in } A\ cub. \text{ bis} - Bqq.,$$

et enfin

$$B \text{ in } A\ cub. \text{ bis} + B\ cub. \text{ in } A \text{ bis} - A\ qq. \quad \text{égal à} \quad Bqq.,$$

laquelle équation, pour trouver la valeur de A, se peut résoudre ou par ma méthode topique, ou par telle autre qu'on voudra.

Or, A étant connue, le côté droit Z sera connu, et si le galand donné est différent de celui-ci, il faudra faire :

comme le côté droit de celui-ci à la ligne AD ou B donnée,
ainsi le côté droit du galand donné à une autre ligne

qui déterminera un point semblable au point D, et la question est faite.

S'il y a manque en la supputation, vous la corrigerez, car je n'ai pas seulement le loisir de relire ma lettre.

10. Pour Galilée ([1]), j'avois commencé de l'examiner par le menu, et, si j'ai du loisir assez, je continuerai.

Lorsqu'il parle de la proportion de la vitesse en la descente qui se fait en un même ou divers milieux par des corps différents, vous trouverez que son expérience qui précède contredit sa règle qui suit.

Je vous entretiendrai une autre fois plus à loisir, bien que l'oisiveté de la campagne vous ait présentement fait voir une lettre plus longue que je n'avois desseigné.

Je suis, mon Révérend Père, votre très humble serviteur,

Fermat.

Ce 22 octobre 1638.

11. Puisque mes deux vers ([2]) ont eu votre approbation, en voici deux autres de même main qu'on estime ici plus que les premiers et desquels vous me direz, s'il vous plait, votre sentiment :

Optato patriam afflictam Delphine beavit
Rex Justus : nunquam justior ille fuit.

XXXVI.

FERMAT A MERSENNE ([3]).

DIMANCHE 26 DÉCEMBRE 1638.

(A, f^os 23-24; B, f° 25 v°.)

1. Pour les nombres, je peux trouver par ma méthode toutes les questions des parties aliquotes ([4]), mais la longueur des opérations me rebute et la recherche des nombres premiers, à laquelle toutes ces

([1]) *Voir* Lettre XXXIII, 5.
([2]) Ces vers de Fermat ne sont pas connus.
([3]) Cette Pièce est un extrait d'une Lettre perdue, déjà publié par M. Charles Henry (*Recherches, etc.*, pp. 177-178) d'après le brouillon d'Arbogast, qui dérive d'une copie de Mersenne.
([4]) *Voir* Lettre XXXIII, 4.

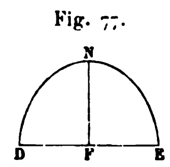
questions aboutissent. Sur lequel sujet je ne sais point de méthode que la vulgaire, sinon qu'il suffit de faire la division jusques à la plus petite racine quarrée du nombre donné, car si on n'a point trouvé de diviseur jusque là, on n'a garde d'en trouver de plus grands, pource que leur quotient seroit moindre que la racine quarrée, ce qui est impossible, par l'expérience qu'on aura déjà faite.

2. Pour la Géométrie, comme toutes les courbes et les tangentes qui sont de la juridiction de la méthode de M. Descartes le sont aussi de la mienne, et particulièrement lorsque la comparaison des portions du diamètre aux appliquées est mêlée de lignes courbes, je m'en démêle aussi aisément que des simples tangentes. De quoi je vous ai déjà donné quelques exemples, vous priant d'en proposer les questions et principalement le dernier exemple [1], sur quoi vous ne m'avez pas répondu. Obligez-moi donc de savoir si les messieurs de Paris en peuvent donner la solution, et je vous envoierai tout aussitôt la mienne.

3. Bien plus, je donnerai infinies tangentes de courbes dont la proportion est pleine d'asymmétries.

Soit la courbe DNE (*fig.* 77), le diamètre NF, l'appliquée quel-

Fig. 77.



conque DF. Supposons que NF étant appelée A, l'appliquée DF soit égale à

$$\text{lat.}\,(Bq. + Aq.) + \text{lat.}\,(Dq. - Aq.) + \text{lat.}\,(R \text{ in } A - Aq.)$$
$$+ \text{lat.}\left(\frac{A\,cub. - B \text{ in } Aq.}{D}\right) + \text{lat.}\left(\frac{Aqq. + Dq. \text{ in } Aq.}{Bq. + Aq.}\right).$$

Je demande une tangente au point D.

[1] *Voir* Lettre XXXV, 6.

Ma méthode les donnera, et infinies de pareille nature, etc., quand bien la ligne DF seroit composée de centinomies ou plus grand nombre de termes.

Je ne dis rien que je n'exécute dès qu'on m'aura témoigné qu'on ne le sait pas.

4. Je proposerai le reste après que vous m'aurez envoyé les papiers de M. Descartes ([1]). Cependant j'étends encore ce problème local *ad superficiem* ([2]) qui enchérit sur le plan d'Apollonius, et le conçois ainsi :

Si a quotcumque punctis datis in quibuslibet planis ad punctum unum inflectantur rectæ, et sint species, quæ ab omnibus, dato spatio æquales, punctum ad inflexionem sphæricam superficiem positione datam continget.

La construction se dérive aisément de celle que je donnai il y a longtemps du lieu plan. Et M. de Roberval le pourra trouver d'abord et avouera qu'il y a fort peu de propositions de Géométrie qui valent celle-ci.

([1]) Probablement les importantes Lettres de Descartes à Mersenne, du 27 juillet 1638 (Clerselier, III, 66), du 23 août (III, 65) et du 15 novembre (II, 92).

([2]) *Voir* Lettre XXXV, 7.

ANNÉE 1639.

XXXVII.

FERMAT A MERSENNE (1).

DIMANCHE 20 FÉVRIER 1639.

(B, f° 2 v°.)

1. Vous m'avez envoyé 360 duquel les parties aliquotes sont au même nombre comme 9 à 4, et moi je vous envoie 2016 qui a la même propriété.

2. Je viens maintenant au défi des plus grands géomètres du monde (2).

Pour première question, proposé :

1C — 6N égal à 40 et la valeur d'1N, 4,

et encore

1C + 4N égal à 80, où N est encore 4,

ils demandent la méthode pour trouver la racine en pareilles questions sans aller à tâtons.

(1) Extrait inédit d'une Lettre perdue.

(2) Descartes, dans sa Lettre à Mersenne du 9 février 1639 (Clerselier, II, 97, p. 450), répond à ces mêmes questions. La seconde et la troisième lui avaient été adressées le 25 janvier; il les désigne comme étant d'un M. Dounot. La première ne lui fut envoyée que par le courrier suivant.

Je vous réponds avec Viète (¹) que ceux qui feront cette recherche sans employer les artifices déjà connus *excruciabunt se frustra et bonas horas mathematices quam colent dispendio perdent.*

3. Ils proposent ensuite

$$1C - 8Q + 19N \quad \text{égal à} \quad 14,$$

et après avoir déterminé que le problème est ambigu et donné trois valeurs de la racine, savoir 2, $3-\sqrt{2}$, $3+\sqrt{2}$, ils ajoutent : *Qui dederit quartam solutionem, portento erit simile.*

En quoi, sans préjudice de la grammaire, ils pèchent autant contre les Mathématiques, qui nous enseignent qu'il est impossible qu'en ce cas et autres pareils, il y ait quatre solutions. Car il est très certain qu'un problème ne peut recevoir pour le plus qu'autant de solutions que son plus grand terme a de degrés, et ainsi ils ont fait eux-mêmes ce *portentum* d'avoir proposé une question impossible.

4. Mais la troisième proposition contient sans doute la plus forte attaque, qui semble d'autant plus considérable que le moyen dont Viète s'est servi pour soudre pareilles questions, lequel il appelle *syncrisis* en son Traité *De recognitione æquationum* (²), est défectueux et ne dit pas tout.

Voici la dernière question :

$$1C - 9Q + 13N \quad \text{æq.} \quad \sqrt{288} - 15.$$

Quæritur 1 N. *Hoc problema recipit tres solutiones quarum exhibimus primam, scilicet* $3-\sqrt{2}$, *quæ satisfacit exacte.*

Si reliquas duas dederim, ero illis *magnus Apollo.*

Hæ sunt : prima $3+\sqrt{18}$, secunda $3-\sqrt{18}$.

(¹) VIÈTE (éd. Schooten, Leyde, Elzevirs, 1646), *De emendatione æquationum*, chap. I, p. 129 :

« Itaque excruciarunt se frustra et bonas horas Mathematices quam colebant dispendio » absumpserunt. »

(²) *Ibid.*, pages 104 et suiv.

Si cela ne suffit, je donnerai une méthode générale (1) pour toutes solutions pareilles, laquelle réussit sans nulle peine, et n'a pas les défauts de celle de Viète, qui est très fâcheuse à cause des divisions, particulièrement aux exemples un peu malaisés, comme celui dont est question, que les analystes communs ne sauraient soudre par la *syncrise*.

(1) *Voir* Lettre XXXVIII *bis*, 4.

ANNÉE 1640.

XXXVIII.

FRENICLE A MERSENNE (¹).

< MARS 1640 >

(Fr. n. a. 6204, f° 229.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Puisque vous desirez que je vous rafraîchisse la mémoire de l'entretien que nous eûmes dernièrement ensemble touchant les nombres des tables magiques, je vous dirai que ce que M. Fermat vous en a envoyé est fort peu de chose, car il n'y a presque rien hors de ce qu'il peut avoir vu dans Stiphelius, Spinula et la vieille Clavicule (²), et que la méthode qu'il dit avoir pour les construire n'est autre que celle qu'ils enseignent, encore qu'elle ne soit pas d'eux : laquelle, pour ce qui regarde les impairs, est la plus noble qui se sauroit trouver et est si facile que ce n'est qu'un jeu d'enfant, et n'y a pas grand sujet de se tant glorifier pour l'avoir apprise dans un livre.

(¹) Lettre inédite qui fut communiquée à Fermat et à laquelle il répondit par la suivante, XXXVIII *bis*.

(²) Arithmetica integra, authore Michaele *Stifelio*, cum præfatione Philippi Melanchthonis. — Norimbergæ apud Joh. Petrejum. Anno Christi MDXLIII. Cum gratia et privilegio Cæsareo atque Regio ad sexennium.

Franciscus *Spinola* est cité dans les *Deliciæ physicomathematicæ* de Daniel Schwenter, Nuremberg, 1626, comme s'étant occupé des carrés magiques. Le seul Ouvrage imprimé qui soit connu avec ce nom d'auteur (*P. Francisci Spinulæ Mediolanensis Opera*, Venise, 1563) est un Volume de vers latins où ne se trouve aucune allusion à ce sujet.

Nous n'avons pu déterminer non plus quel Ouvrage Frenicle désigne sous le nom de *vieille Clavicule*; il s'agit peut-être d'un tirage sans lieu ni date de l'Écrit théosophique *Clavicula Salomonis filii David*.

2. S'il savoit quelque chose de nouveau pour les pairs, il vous devroit avoir envoyé une table du quarré de 18 ou 22 ou pour le moins de 14, qui a servi de borne à Bachet ([1]), et, quand il l'aura fait, nous avouerons qu'il y sait quelque chose.

3. Ce qu'il vous a envoyé n'est pas digne d'un honnête homme comme lui, mais est plutôt l'occupation d'un écolier et, s'il veut s'employer à un exercice qui lui soit plus convenable, sans sortir de cette matière, qu'il dispose les nombres d'un quarré en telle sorte que toutes les lignes et diagonales soient égales et que, telles enceintes qu'on voudra, et non plus, en étant ôtées, le quarré qui restera soit de même nature que le premier.

Par exemple, que 22 soit donné pour le côté du quarré magique; on demande que, ce quarré ayant les conditions requises, on en puisse ôter *trois* enceintes et que le quarré restant, qui aura 16 cellules de côté, soit encore magique; et qu'ôtant *deux* enceintes de celui-ci, le quarré restant, qui aura 12 cellules de chaque côté, soit encore magique; et que de celui-ci, en ôtant *une* enceinte, le quarré restant, qui aura 10 de côté, soit encore magique; et que du premier quarré de 22, tel autre nombre d'enceintes qu'on en veuille ôter, le quarré restant ne soit plus magique.

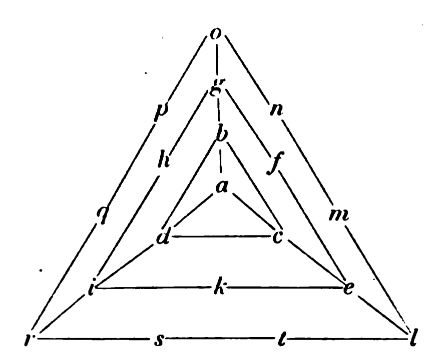
4. Davantage, il se peut aussi étudier à faire de ces tables qui aient une partie de leurs cellules vides et néanmoins que toutes les lignes, colonnes et diagonales, soient égales tant en la quantité des nombres qu'en la somme d'iceux.

Par exemple, s'il y a en la table quarrée 144 cellules, qu'il n'y en ait que 60 ou autre nombre possible de remplies de nombres consécutifs et qui commencent par tel qu'on voudra, et qu'en chaque colonne, ligne et diagonale, il y ait 5 nombres, la somme desquels soit égale par tout.

5. Mais s'il veut sortir des quarrés et s'appliquer aux solides, il pourra considérer les nombres disposés en telle sorte qu'ils forment

([1]) Problèmes plaisans et delectables qui se font par les nombres. — A Lyon, MDCXXIV.

les trois faces extérieures d'une pyramide triangulaire ou *tétraèdre*, et faire que les dits nombres, étant en progression donnée, fassent toutes les enceintes égales entre elles.



Par exemple, que la somme des nombres représentés par *l, m, n, o, p, q, r, s, t* soit égale à celle de *e, f, g, h, i, k*, et à celle de *c, b, d* : et que les lignes *a, c, e, l*; *a, b, g, o* et *a, d, i, r* soient égales entre elles en valeur comme elles le sont en longueur en Géométrie; et que les trois lignes de chaque enceinte soient égales entre elles, c'est-à-dire l'une à l'autre, jusques à où il se peut; et déterminer à quelles enceintes doit finir l'égalité susdite.

Ce seront là des occupations qui méritent aucunement qu'il s'y emploie et, quand il y aura satisfait, on lui découvrira des choses qui surpasseront d'autant celles-ci que celles-ci surpassent ce qu'il vous a envoyé.

6. Je vous dirai aussi que, s'il ne veut pas sortir des plans, je lui pourrois demander un *hexagone* rempli de nombres consécutifs, qui ait même somme en chacun de ses côtés et des lignes qui vont du centre à la circonférence.

o
p *n*
q *b* *m*
f *c*
r *a* *l*
g *d*
s *e* *k*
t *i*
h

Par exemple, que les nombres représentés par *o*, *n*, *m*; *m*, *l*, *k*; *k*, *i*, *h*; *h*, *t*, *s*; *s*, *r*, *q*; *q*, *p*, *o*, comme aussi par *a*, *b*, *o*; *a*, *c*, *m*; *a*, *d*, *k*; *a*, *e*, *h*; *a*, *g*, *s* et *a*, *f*, *q*, eûssent chacun leur somme égale; et en outre, qu'ôtant quelques enceintes de ladite figure, sous les conditions déduites au quarré, la même égalité demeurât encore.

Vous remarquerez, s'il vous plaît, que la quantité de lettres qui sont ici ne sert que d'exemple, et ne s'ensuit pas d'icelle qu'on puisse faire ces choses sous la quantité qu'elles représentent, car elles ne servent que pour les donner mieux à entendre.

7. Pour ce qui est des nombres dont il veut renouer la conférence, on attend encore la solution de ceux qu'on lui a envoyés autrefois, et de celui que vous avez encore envoyé depuis peu ([1]), duquel il doit d'autant plus facilement venir à bout, qu'il a trouvé la démonstration de tout ce qui concerne les parties aliquotes.

8. Et s'il trouve que ce soit peu de chose pour lui, qu'il vous envoie un nombre *parfait* qui ait 20 lettres ou le prochainement suivant, afin de ne point sortir de ce qu'il sait avec perfection, et j'estime qu'il en viendra d'autant plus facilement à bout, qu'il pourra sur tout ce que dessus consulter l'oracle de ce grand démon dont vous nous avez tant fait de fête, lequel nous tiendrons pour bon ange et des plus blancs, s'il y satisfait. Encore que, s'ils étoient versés en ces matières-là comme le sont vos Sainte-Croix et Frenicle, cela leur serviroit plutôt d'ébattement que de travail, vu qu'il y a longtemps qu'ils ont trouvé et considéré ces choses-là.

Voilà, mon Père, si j'ai bonne mémoire, un raccourci de tout l'entretien que nous eûmes ensemble avant-hier.

Je suis, mon Révérend Père,

Votre très humble et affectionné serviteur,

FRENICLE.

([1]) *Comparer* les Lettres XXXVI, 1 et XXXVII, 1. Frenicle fait allusion à une correspondance perdue, qui paraît avoir surtout concerné les nombres en relation donnée avec la somme de leurs parties aliquotes.

XXXVIII *bis*.

FERMAT A MERSENNE.

DIMANCHE 1 AVRIL 1640.

(*Va*, p. 173-176.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Je vous dois deux réponses pour les deux dernières Lettres que j'ai reçues de votre part et que j'ai trouvées toutes deux en même temps à mon retour de la campagne; le sujet de la première concerne Monsieur Desargues et celui de la seconde Monsieur de Frenicle.

2. Je suspends la réponse aux questions de Monsieur Desargues, jusques à ce que j'aurai vu par votre faveur le troisième Livre des Coniques de Monsieur Mydorge et les autres (¹), s'il y en a d'imprimés depuis les deux premiers qui sont les seuls que j'ai en mon pouvoir. Je vous promets alors de m'étendre sur tout ce qu'il semble que vous desirez de moi, et cependant je suis obligé de vous dire que j'estime beaucoup Monsieur Desargues et d'autant plus qu'il est lui seul inventeur de ses Coniques; son livret, qui passe, dites-vous, pour jargon, m'a paru très intelligible et très ingénieux (²).

(¹) Les deux premiers Livres des Coniques de Mydorge avaient été publiés en 1631 sous le titre :

Claudii Mydorgii patricii Parisini Prodromi Catoptricorum et Dioptricorum sive Conicorum operis ad abdita radii reflexi et refracti mysteria prævii et facem præferentis Libri primus et secundus. D. A. L. G. — Parisiis, Ex typographia I. Dedin, via Nucum, sub signo trium Columbarum, M.DC.XXXI. Cum privilegio Regis (in-folio).

Les deux suivants furent ajoutés dans la réédition de 1639 :

Claudii Mydorgii.... Libri quatuor priores. D. A. L. G. — Parisiis, Ex typographia I. Dedin, via Nucum, sub insigni parvi Scuti, M.DC.XXXIX. Cum privilegio Regis.

(²) Il s'agit du *Brouillon project d'une atteinte aux euenemens des rencontres d'un cone avec un plan, par le S. G. D. L.*, dont l'édition originale, imprimée à Paris en 1639, est introuvable (Œuvres de Desargues, éd. Poudra, I, pages 97 à 230). — La correspondance de Fermat ne contient aucune autre indication sur les questions que lui avait posées Desargues.

3. Pour Monsieur de Frenicle, ses inventions en Arithmétique me ravissent et je vous déclare ingénûment que j'admire ce génie qui, sans aide d'Algèbre, pousse si avant dans la connoissance des nombres entiers, et ce que j'y trouve de plus excellent consiste en la vitesse de ses opérations, de quoi font foi les nombres aliquotaires qu'il manie avec tant d'aisance. S'il vouloit m'obliger de me mettre dans quelqu'une de ses routes, je lui en aurois très grande obligation et ne ferois jamais difficulté de l'avouer, car les voies ordinaires me lassent et, lorsque j'entreprends quelqu'une de ces questions, il me semble que je vois devant moi

Magnum maris æquor arandum (1),

à cause de ces fréquentes divisions qu'il faut faire pour trouver les nombres premiers. Ce n'est pas que mon analyse soit défectueuse, mais elle est lente et longue pour ce regard et j'ose dire sans vanité que, si je pouvois l'accompagner de cette facilité, je trouverois de fort belles choses. Je voudrois avoir mérité par mes services la faveur que je lui demande et ne désespère pas même de la payer par quelques inventions qui peut-être seront nouvelles à Monsieur Frenicle.

(B, f° 3 r°) (2).

4. Pour la méthode que j'oppose à la *syncrise* (3), ce n'est seulement que pour éviter les divisions qui sont souvent très fâcheuses en cette sorte de questions.

Soit, par exemple :

$$bda - ba^2 - a^3 \quad \text{æq.} \quad z^{\text{sol.}}.$$

Cette équation peut avoir trois solutions, desquelles soit par exemple *n* l'une qui soit donnée. Il faut trouver les autres deux.

(1) Virgile, *Enéide*, II, 780 : Longa tibi exsilia et vastum maris æquor arandum.

(2) Le fragment qui suit est inédit; il est reproduit d'après l'extrait de la Lettre du 1er avril 1640, que contient le manuscrit Vicq-d'Azyr-Boncompagni. Il est très improbable que les notations algébriques, dans lesquelles dominent les habitudes cartésiennes, soient réellement celles de Fermat.

(3) *Voir* Tome I, page 147, note 3. — *Comparer* Lettre XXXVII, 4.

Pour y parvenir, il est nécessaire de baisser cette équation d'un degré, ce que Viète fait par division et M. Descartes aussi; voici comme je procède :

n est égal à a; or il y a deux lignes égales à a, inégales à n. Posons que l'une de ces deux lignes soit $n+e$, et faisons maintenant l'équation comme si $n+e$ étoit a, nous aurons

$$bdn + bde - be^2 - e^3 - bn^2 - 2bne - 3ne^2 - n^3 - 3n^2e \quad \text{æq.} \quad z^{\text{sol.}}.$$

Or, puisque a est égal à n, donc

$$bda - ba^2 - a^3 \text{ sera égal à } bdn - bn^2 - n^3.$$

Mais

$$bda - ba^2 - a^3 \quad \text{est égal à} \quad z^{\text{sol.}},$$

par la première équation; donc

$$bdn - bn^2 - n^3 \quad \text{est égal à} \quad z^{\text{sol.}}.$$

Otez donc d'un côté de la seconde équation $bdn - bn^2 - n^3$, et de l'autre côté z^{sol}, il restera

$$bde - be^2 - e^3 - 2bne - 3ne^2 - 3n^2e \quad \text{æq.} \quad 0.$$

Et, le tout divisé par e, qui est une division simple et non composée comme celle de Viète et des autres, restera

$$bd - be - e^2 - 2bn - 3ne - 3n^2 \quad \text{æq.} \quad 0$$

et ainsi l'équation ne sera que quarrée et, lorsque e sera connu, en y ajoutant n, vous aurez la ligne cherchée.

Ce n'est pas que j'estime beaucoup ceci, ni que j'aie tout dit en vous donnant ce seul exemple, mais c'est seulement pour la facilité de l'opération.

5. Je viens aux propositions des quarrés (¹) : sur quoi je vous puis protester que je n'ai jamais vu ni Stiphelius ni cette *Clavicule* et ne sais

(¹) *Voir* Lettre XXXVIII, 1 à 3. — Ici reprend le texte donné par les *Varia*. Le carré magique est inédit.

ce que ces livres contiennent et, pour faire voir que j'ai vu peut-être plus loin qu'eux et satisfaire à la semonce de M. Frenicle, je vous envoie le quarré de 14 aux conditions requises, duquel, si vous ôtez deux enceintes, le restant sera aussi quarré aux conditions requises et, si vous ôtez encore deux enceintes de ce restant, ce qui restera sera encore quarré aux mêmes conditions.

1	2	185	186	5	6	7	190	191	192	11	194	195	14
15	16	26	25	24	177	176	175	174	173	172	171	27	28
42	156	31	165	159	34	35	162	37	164	158	40	167	29
56	142	152	46	52	149	148	147	146	47	53	45	153	43
57	128	59	130	61	135	134	63	132	66	137	68	139	70
71	125	73	123	122	76	120	119	19	75	116	82	114	84
85	111	96	109	108	107	91	92	90	103	102	87	100	98
112	97	110	95	89	93	105	106	104	94	88	101	86	99
126	83	115	81	80	118	77	78	121	117	74	124	72	113
140	69	138	60	131	62	64	133	65	136	67	129	58	127
141	55	54	144	150	51	50	49	48	145	151	143	44	154
168	41	157	32	33	160	161	36	163	38	39	166	30	155
182	170	180	179	178	23	22	21	20	19	18	17	181	169
183	184	3	4	187	188	189	8	9	10	193	12	13	196

Le premier quarré fait en ces lignes 1379; le deuxième fait 985; le troisième fait 591.

6. Or, ne doutez point que je ne possède la méthode générale pour faire toute sorte de quarrés en cette sorte et aux conditions qu'ôtant tel nombre d'enceintes qu'on voudra, le restant soit encore quarré, etc.

Mais, à n'ôter qu'une seule enceinte, je crois la question impossible : à quoi peut-être M. Frenicle ne prit pas garde (¹), lorsqu'il me proposa d'ôter trois enceintes de 22, et puis deux du restant, et puis une du restant. Car, aux deux premiers cas, la question est faisable en beaucoup de manières, mais au troisième je ne l'estime point possible : de quoi la raison dépend de ma règle, laquelle je n'ai pourtant ni trouvée ni cherchée que lorsque j'ai reçu la Lettre de M. Frenicle, et c'est pour cela que je ne détermine pas absolument l'impossibilité de ce cas, jusqu'à ce que j'aurai eu encore quelques jours pour y songer de nouveau.

7. Mais ce que je trouve de plus beau en ma règle, et que je ne crois pas avoir été touché ni par Stiphelius ni par aucun autre, est que je puis déterminer en combien de façons, et non plus, chaque quarré peut être disposé aux conditions requises, comme par exemple, s'il m'est permis de demander à M. Frenicle, en combien de sortes différentes 22 peut être rangé.

8. Je passe bien plus outre, et passant aux solides qui le sont effectivement, j'ai trouvé une règle générale pour ranger tous les cubes à l'infini, en telle façon que toutes les lignes de leurs quarrés, tant diagonales, de largeur, de longueur que de hauteur, fassent un même nombre, et déterminer outre cela en combien de façons différentes chaque cube doit être rangé, ce qui, me semble, est une des plus belles choses de l'Arithmétique.

Vous en trouverez un exemple (²) sur le cube 64, à côté du quarré de 14.

Il faut ranger les quatre quarrés qui font la solidité du cube, en telle façon que le premier soit dessous; le deuxième soit mis sur le premier, en telle façon que 53 soit sur 4 et 56 sur 1; il faut ensuite mettre le troisième sur le deuxième, en telle façon que 60 soit sur 53 et 57

(¹) *Voir* Lettre XXXVIII, 3. — *Comparer* Lettre XL, 3.

(²) Les carrés ci-après se trouvaient, ainsi que le carré magique reproduit plus haut (5), transcrits sur une feuille détachée; ils ne sont pas non plus donnés dans les *Varia*.

sur 56; et enfin il faut mettre le quatrième sur le troisième, en sorte que 13 soit sur 60 et 16 sur 57. Cela étant fait, vous aurez un cube qui sera divisé en douze quarrés, lesquels se trouveront tous disposés aux conditions requises; il y aura en tout 72 lignes différentes, chacune desquelles fera une même somme, savoir 130.

1.

4	62	63	1
41	23	22	44
21	43	42	24
64	2	3	61

2.

53	11	10	56
32	34	35	29
36	30	31	32
9	55	54	12

3.

60	6	7	57
17	47	46	20
45	19	18	48
8	58	59	5

4.

13	51	50	16
40	26	27	37
28	38	39	25
49	15	14	52

9. Vous voyez combien ceci est au-dessus du tétraèdre et de l'hexagone (1) de M. Frenicle, desquels le premier n'est pas solide en effet, mais par fiction seulement, quoique je ne doute pas qu'il ne puisse être haussé en solide; mais, dans ces deux propositions, il y a beaucoup de nombres superflus dans les entre-deux des lignes qui aboutissent ou au sommet ou au centre, ce qui fait qu'elles ne sont pas si parfaites que la mienne, en laquelle je puis encore ôter les enceintes requises et faire que le restant demeure aussi cube, etc.

Je soumets pourtant le tout à mondit Sr de Frenicle et crois que, si j'avois l'honneur d'être connu de lui, il auroit omis quelques paroles qui sont dans sa Lettre. Je ne resterai pas de lui assurer l'estime que je fais de lui et de le conjurer de me faire part de sa méthode.

10. Pour le solide de la roulette, je le réduirois bien à des solides plus simples, mais à des sphères, cônes ou cylindres qui soient créés par des lignes droites données, il me semble qu'il est impossible.

Excusez si le papier me manque, etc.

11. *P.-S.* Depuis ma Lettre écrite (2), un de mes vieux papiers m'est

(1) *Voir* Lettre XXXVIII, 5 et 6.

(2) Ce post-scriptum paraît appartenir à une Lettre antérieure et avoir été l'occasion de la Lettre XXXVIII de Frenicle.

tombé en main, lequel contient une observation sur le problème XXI du Livre de Bachet, imprimé à Lyon en 1624, et qui porte pour titre : *Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres.*

Voici l'endroit (¹); il propose de ranger en quarré les nombres consécutifs en progression arithmétique, en sorte que tous les rangs, tant de haut, de bas que des côtés et par les diamètres, fassent une même somme, de quoi il baille une règle générale pour les quarrés impairs, et avoue n'en avoir pu trouver aucune pour les pairs, mais avoir fait seulement plusieurs observations particulières, par le moyen desquelles il a rangé les pairs jusques à 144.

Or, pour la règle des quarrés impairs, je dis premièrement qu'elle n'est pas de son invention, car elle est dans l'Arithmétique de Cardan (²); mais d'ailleurs elle ne résout la question que d'une seule façon, qui le peut être en plusieurs. Je dis donc :

1° Que ma méthode range les quarrés pairs et impairs à l'infini;

2° Qu'elle les range en toutes les façons possibles, lesquelles augmentent comme les combinaisons, à mesure que les quarrés sont plus grands;

3° Que la règle des pairement impairs n'est pas différente de celle des pairement pairs, mais bien la même, quoique Bachet ait cru qu'elles devoient être différentes.

Voici un exemple de ma méthode :

Il range le 25 d'une seule façon, n'y sachant autre chose, et voici comme il le range :

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

(¹) Pages 60 et suivantes de l'édition originale.

(²) *Practica arithmetica et mensurandi singularis* (Milan, 1539), réimprimée dans le quatrième tome de l'édition des Œuvres de Cardan en 10 volumes (Lyon, 1663). — Cardan y donne, sans règle de construction, sept carrés magiques (de 3^2 à 9^2) qu'il attribue aux sept planètes et appelle *planétaires*. Il paraît les avoir empruntés à Agrippa de Nettesheym (*De occulta philosophia*. Cologne, 1533).

En voici trois autres que j'ai choisis parmi plusieurs que ma méthode enseigne :

11	22	9	20	3
2	14	25	8	16
19	5	13	21	7
10	18	1	12	24
23	6	17	4	15

11	24	17	10	9
4	12	25	18	6
7	5	13	21	19
20	8	1	14	22
23	16	9	2	15

12	25	6	19	3
5	11	24	8	17
16	4	13	22	10
9	18	2	15	21
23	7	20	1	14

Il range le 36 à tâtons d'une seule façon, comme s'ensuit :

6	32	3	34	35	1
7	11	27	28	8	30
19	14	16	15	23	24
18	20	22	21	17	13
25	29	10	9	26	12
36	5	33	4	2	31

En voici une autre parmi plusieurs que ma méthode fournit; si le temps ne me manquoit, je vous en envoierois demi-douzaine :

5	31	4	33	36	2
14	18	22	21	13	23
26	7	9	10	30	29
11	25	27	28	12	8
20	24	15	16	19	17
35	6	34	3	1	32

Mais, parce qu'on pourroit croire que la règle n'a qu'un seul exemple, lorsque les diamétraux demeurent les mêmes, voici qui fait voir le contraire : c'est un exemple de ma méthode du 64, différent de celui de Bachet, et qui garde néanmoins les diamétraux :

1	7	6	60	61	59	58	8
16	10	51	52	53	54	15	9
17	47	19	45	44	22	18	48
40	34	38	28	29	27	31	33
32	26	30	36	37	35	39	25
41	23	43	21	20	46	42	24
56	50	11	13	12	14	55	49
57	63	62	5	4	3	2	64

En voilà assez pour donner de l'exercice à M. Frenicle, car je ne sais guère rien de plus beau en l'Arithmétique que ces nombres que quelques uns appellent *planetarios*, et les autres *magicos;* et de fait j'ai vu plusieurs talismans, où quelques uns de ces quarrés rangés de la sorte sont décrits, et parmi plusieurs un grand, d'argent, qui contient le 49 rangé selon la méthode de Bachet, ce qui fait croire que personne n'a encore connu la générale ni le nombre des solutions qui peuvent arriver à chaque quarré.

Si la chose est sue à Paris, vous m'en éclaircirez; en tout cas, je ne la dois qu'à moi seul.

Je suis etc.

XXXIX.

FERMAT A MERSENNE [1].

< MAI? 1640 >

(B, f° 6 v°.)

1. Je trouve plusieurs abrégés pour trouver les nombres parfaits [2] et je dis par avance qu'il n'y en a aucun de 20 ni de 21 caractères, ce qui détruit l'opinion de ceux qui avoient cru qu'il y en avoit un dans l'enceinte de chaque dixaine; comme un depuis 1 jusques à 10, un autre depuis 10 jusques à 100, un autre depuis 100 jusques à 1000, etc. Ce qui n'est pas vrai, comme il paraît par cet exemple; car depuis 10 000 000 000 000 000 000 jusques à la dixaine suivante, il n'y en a pas un, ni depuis la suivante à la prochaine non plus.

2. Je passe à ma proposition [3] de ranger les quarrés. Vous pouvez vous assurer que j'en possède absolument la méthode, aussi bien que

[1] Ce fragment inédit, de date incertaine, semble avoir fait partie d'une Lettre envoyée à Mersenne par Fermat avant qu'il en eût reçu la réponse de Frenicle à la précédente.

[2] *Voir* Lettre XXXVIII, 8. — *Comparer* ci-après Lettre XL, 6.

[3] *Comparer* Lettres XXXVIII *bis*, 7, et XL, 2.

celle des cubes, et pour vous montrer jusques où va la connaissance que j'en ai, le quarré de 8, qui est 64, se peut disposer en autant de façons differentes, et non plus, qu'il y a d'unités en ce nombre

1 004 144 995 344,

ce qui sans doute vous effraiera, puisque Bachet et les autres que j'ai vus n'en donnent qu'une seule.

Je rangerai de même tous les quarrés et cubes à l'infini et déterminerai en combien de façons et non plus, avec la démonstration.

3. Pour savoir si M. Frenicle ne procède point par tables, proposez lui (1) de

Trouver un triangle rectangle duquel l'aire soit un nombre quarré ;
Trouver deux quarréquarrés desquels la somme soit quarréquarrée ;
Trouver quatre quarrés en proportion arithmétique continue ;
Trouver deux cubes desquels la somme soit cube ;

S'il vous répond que jusques à un certain nombre de chiffres il a éprouvé que ces questions ne trouvent point de solution, assurez-vous qu'il procède par tables.

XL.

FERMAT A MERSENNE.

< JUIN? 1640. >

(Va, p. 176-178.)

MON REVÉREND PÈRE,

1. J'ai reçu avec grande satisfaction votre lettre accompagnée de celle (2) de M. Frenicle, qui me confirme en l'estime que je faisois de

(1) *Voir* Lettre XII, 2, où Fermat proposait déjà à Sainte-Croix trois de ces problèmes impossibles, et un dernier analogue au troisième de la présente.
(2) En réponse à la Lettre XXXVIII *bis*.

lui. J'y réponds succinctement et premièrement, sur ce qu'il a douté que j'eusse une méthode générale pour ranger tous les quarrés pairs à l'infini. Je vous prie de l'assurer du contraire, car il est très certain qu'il y a plus de dix ans que je la découvris et en donnai dès lors des exemples sur des quarrés plus hauts que ceux de Bachet, comme M. Despagnet vous poürroit témoigner.

2. Il est vrai que je n'avois pas songé de déterminer exactement en combien de façons ces quarrés pouvoient être ordonnés, et j'avoüe que je n'avois pas vu toutes les manières qui y conduisent, puisque je doutois même que le quarré pût demeurer magique en levant une seule enceinte (1); mais, ayant trouvé une règle pour les ordonner en beaucoup de façons, je crus qu'elle les contenoit toutes, ce qui me semble excusable, puisque je vous envoyai ma Lettre aussitôt après la première méditation que j'eus fait sur ce sujet.

3. Depuis que j'ai reçu la dernière de M. Frenicle, j'ai aussitôt découvert que la question du quarré de 22 étoit de ma portée et, pource que l'opération seroit trop longue qui consiste à ranger le quarré de 22 en telle sorte que, levant trois enceintes, il reste magique, et du restant encore deux et qu'il demeure magique, et puis une seule du reste à la même condition, je me contenterai pour ce coup de vous envoyer le carré qui reste après les trois premières et les deux secondes enceintes ôtées, duquel si vous levez une seule enceinte, le reste demeure magique, comme vous verrez.

Pource que le temps me manque, je diffère à vous envoyer les cinq enceintes qui manquent pour parfaire le quarré entier de 22, jusques au départ du prochain courrier (2).

Après cela vous devez croire que, dès que j'aurai loisir, j'irai aussi avant sur ce sujet qu'il est possible.

(1) *Comparer* Lettres XXXVIII *bis*, 6 et 7, et XXXIX, 2.
(2) La Lettre ainsi annoncée fait défaut.

127	126	125	361	362	363	364	365	366	118	117	116
347	148	338	339	145	143	342	142	344	345	139	138
325	161	169	168	318	319	320	321	163	162	324	160
292	293	191	190	299	298	297	186	185	184	302	193
270	280	272	273	211	210	209	208	278	279	205	215
248	227	250	251	230	232	231	233	256	257	258	237
226	249	228	229	252	253	254	255	234	235	236	259
204	214	206	207	277	276	275	274	212	213	271	281
182	192	301	300	189	188	187	296	295	294	183	303
171	315	323	322	164	165	166	167	317	316	170	314
149	346	147	146	340	341	144	343	141	140	337	336
369	359	360	124	123	122	121	120	119	367	368	358

4. Pour ce qui est des cubes (¹), je n'en sais pas plus que M. Frenicle, mais pourtant je puis les ranger tous à la charge que les diagonales seules des quarrés que nous pouvons supposer parallèles à l'horizon seront égales aux côtés des quarrés, ce qui n'est pas peu de chose, en attendant qu'une plus longue méditation découvre le reste. Je dresserai celui de 8, 10 et 12 à ces conditions, si M. Frenicle me l'ordonne.

5. Pour les quarrés qui ont des cellules vides (²), j'y travaillerai au plus tôt.

6. Ce que j'estime le plus est l'abrégé (³) pour l'invention des nombres parfaits, à quoi je suis résolu de m'attacher, si M. Frenicle ne me fait part de sa méthode.

(¹) *Voir* Lettre XXXVIII *bis*, 8.
(²) *Voir* Lettre XXXVIII, 4.
(³) *Voir* Lettre XXXIX, 1.

Voici trois propositions que j'ai trouvées, sur lesquelles j'espère de faire un grand bâtiment :

Les nombres moindres de l'unité que ceux qui procèdent de la progression double, comme

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191	etc.,

soient appelés les radicaux des nombres parfaits, pource que, toutes les fois qu'ils sont premiers, ils les produisent. Mettez, au dessus de ces nombres, autant en progression naturelle : 1, 2, 3, 4, 5, etc. qui soient appelés leurs exposants.

Cela supposé, je dis que :

1° Lorsque l'exposant d'un nombre radical est composé, son radical est aussi composé. Comme, parce que 6, exposant de 63, est composé, je dis que 63 est aussi composé.

2° Lorsque l'exposant est nombre premier, je dis que son radical moins l'unité est mesuré par le double de l'exposant. Comme, parce que 7, exposant de 127, est nombre premier, je dis que 126 est multiple de 14.

3° Lorsque l'exposant est nombre premier, je dis que son radical ne peut être mesuré par aucun nombre premier que par ceux qui sont plus grands de l'unité qu'un multiple du double de l'exposant ou que le double de l'exposant. Comme, parce que 11, exposant de 2047, est nombre premier, je dis qu'il ne peut être mesuré que par un nombre plus grand de l'unité que 22, comme 23, ou bien par un nombre plus grand de l'unité qu'un multiple de 22 : en effet 2047 n'est mesuré que par 23 ou par 89, duquel, si vous ôtez l'unité, reste 88, multiple de 22.

Voilà trois fort belles propositions que j'ai trouvées et prouvées non sans peine : je les puis appeler les fondements de l'invention des nombres parfaits. Je ne doute pas que M. Frenicle ne soit allé plus avant, mais je ne fais que commencer, et sans doute ces propositions passeront pour très belles dans l'esprit de ceux qui n'ont pas beaucoup

épluché ces matières, et je serai bien aise d'apprendre le sentiment de M. de Roberval.

7. Au reste, vous ou moi avons équivoqué de quelques caractères au nombre que j'avois cru parfait ([1]), ce que vous connoîtrez aisément puisque je vous baillois 137 438 953 471 pour son radical, lequel j'ai pourtant depuis trouvé, par l'abrégé tiré de ma troisième proposition, être divisible par 223; ce que j'ai connu à la seconde division que j'ai faite, car, l'exposant dudit radical étant 37, duquel le double est 74, j'ai commencé mes divisions par 149, plus grand de l'unité que le double de 74; puis, continuant par 223, plus grand de l'unité que le triple de 74, j'ai trouvé que ledit radical est multiple de 223.

De ces abrégés j'en vois déjà naître un grand nombre d'autres et *mi par di veder un gran lume.*

Je vous entretiendrai un jour de mon progrès, si M. Frenicle me vient au secours et m'abrège par ce moyen ma recherche des abrégés. En tout cas, je vous conjure de faire en sorte que M. de Roberval joigne son travail au mien, puisque je me trouve pressé de beaucoup d'occupations qui ne me laissent que fort peu de temps à vaquer à ces choses.

Je suis etc.

XLI.

ROBERVAL A FERMAT.

SAMEDI 4 AOUT 1640.

(*Va*, p. 165-166.)

MONSIEUR,

1. Encore que depuis près de trois ans je n'aie eu l'honneur d'avoir commerce avec vous, je n'ai pourtant pas été privé entièrement

([1]) Probablement dans la partie perdue de la Lettre XXXIX.

du plaisir que je reçois de vos spéculations mathématiques, car le Père Mersenne m'a fait la faveur de me communiquer la plupart des lettres qu'il a reçues de vous depuis ce temps là, dans lesquelles j'ai reconnu une augmentation continuelle et très sensible en la beauté et solidité de vos pensées, auxquelles il n'y a rien que d'admirable, soit sur le sujet de la Géométrie ou de l'Arithmétique.

2. Sur tout je suis ravi de votre invention *de minimis et maximis* et du moyen (1) par lequel vous l'appliquez à la recherche des touchantes des lignes courbes, et ne crois pas que jusques ici il se soit vu rien sur ce sujet qui ne cédât de beaucoup à ce que vous nous en avez donné. Car l'invention de M. Descartes, à laquelle j'assigne le premier lieu après la vôtre, n'en approche que de bien loin, parce que, quoiqu'elle puisse être rendue universelle, ce qu'il n'a pas fait et le pourra maintenant à l'imitation de votre dernière addition, toutefois elle est sans comparaison plus longue, plus embarrassée et plus difficile.

3. Je vous dirai que j'ai d'autant plus admiré votre invention qu'à peine croyois-je que, pour trouver les touchantes des lignes courbes qui n'ont rapport qu'à d'autres courbes ou partie à des droites et partie à des courbes, on pût s'en servir, ce que M. Descartes avoue de la sienne sur le sujet de la *roulette* et autres lignes pareilles, lesquelles pour cette considération il rejette de la Géométrie (2) : sans raison, puisqu'à l'imitation de votre dernière addition, sa méthode peut être rendue universelle comme la vôtre, mais avec une difficulté, laquelle bien souvent ne se pourroit presque surmonter par un esprit humain.

4. Cette opinion fut cause que, quand je vis que vous aviez trouvé les touchantes de la roulette (3) et que vous assuriez avoir la règle universelle pour toutes les lignes courbes, je crus qu'elle ne pouvoit être autre que celle que j'avois inventée au temps même que j'inventai cette roulette, laquelle règle ou méthode je n'avois encore commu-

(1) *Voir* le Traité *Doctrinam tangentium*, Tome I, pages 158 à 167.
(2) *Géométrie* de Descartes, éd. Hermann, Paris, 1886, page 16.
(3) *Voir* Lettre XXXIV, 2.

niquée à personne, m'étant contenté d'en avoir démontré les effets à M. Pascal en la tangente de la *quadratrice* qui se trouvoit des plus difficiles, y joignant la démonstration géométrique, comme a fait Archimède en celle de la spirale, laquelle par ma méthode s'expédie en deux mots.

5. J'avois fait la même chose en la *cissoïde* et avois démontré, de plus, que ces deux lignes courbes sont infinies de leur nature et ont des asymptotes parallèles entre elles (1), ce qu'on m'a assuré avoir été déjà démontré par un auteur dont on ne m'a pu dire le nom.

6. J'ai aussi démontré les tangentes des lignes courbes qui se décrivent avec un compas sur la superficie d'un cylindre, puis se réduisent en plan, et en général celles de toutes les courbes qui ont pu venir à ma connoissance; et cette méthode est tellement différente de la vôtre (contre ma première opinion) qu'elles ne se ressemblent en rien qu'en la conclusion.

7. Depuis, M. Mydorge faisant quelques difficultés sur la vôtre, je lui en donnai la solution, et en même temps je lui ouvris les principes de la mienne et lui en fis voir un essai en la cissoïde. Si je sais que vous l'ayez agréable, je vous en écrirai. Elle n'est pas inventée avec une si subtile et si profonde géométrie que la vôtre ou celle de M. Descartes et, partant, elle paroît avec moins d'artifice; en récompense, elle me semble plus simple, plus naturelle et plus courte, de sorte que, pour toutes les touchantes dont j'ai parlé, il ne m'a pas même été besoin de mettre la main à la plume.

8. Depuis cette invention, je me suis appliqué aux lieux solides *ad tres et ad quatuor lineas*, lesquels j'ai entièrement restitués, quoique, pour n'y rien oublier, il ne faille guère moins de discours qu'aux six

(1) Roberval semble avoir considéré la *cissoïde* comme comprenant la courbe symétrique que l'on obtient en changeant le signe de x dans l'équation $y^2(a-x) = (a+x)^3$. Il est probable que les anciens entendaient également dans le même sens leur définition de cette courbe, mais, pas plus que pour la quadratrice, ils n'avaient considéré les branches en dehors du cercle $x^2+y^2=a^2$.

premiers Livres des Éléments. C'est de quoi je vous entretiendrai une autre fois, parce qu'il y a quelque chose qui me semble le mériter.

9. Ensuite j'ai considéré la percussion, le mouvement et les autres effets que cause quelque impression, soit violente ou naturelle, en quoi je ne crois pas avoir mal employé le temps, puisqu'en une matière si épineuse, encore ai-je découvert quelque chose de grande utilité, à ce que je pense, et laquelle je pourrai peut-être augmenter avec le temps.

10. J'oubliois presque à vous dire que les nombres, dont vous avez déjà découvert des propriétés admirables, contiennent de grands mystères; mais, pour les mieux découvrir, il faudroit être plusieurs ensemble, d'accord et sans jalousie, et desquels le génie fût naturellement porté à cette spéculation, ce qui est très difficile à rencontrer. Si ce sujet vous plaît, ou quelqu'un de ceux dont j'ai parlé ci-dessus, je prendrai aussi plaisir à le considérer plus particulièrement, espérant que vous me ferez part de vos inventions, de quoi je vous supplie en qualité de etc.

XLII.

FERMAT A ROBERVAL.

< Aout 1640 >

(*Va*, p. 161-162.)

Monsieur,

1. Après vous avoir remercié de vos civilités ([1]) et protesté que je serai ravi d'avoir des occasions à vous plaire, je vous supplierai de me faire part de votre invention sur le sujet des tangentes des lignes courbes et encore de vos spéculations méchaniques sur la percussion,

([1]) Réponse à la Lettre précédente, XLI.

puisque vous me faites espérer la communication de vos pensées en cette matière.

2. Après cela, je vous dirai que M. Frenicle m'a donné depuis quelque temps l'envie de découvrir les mystères des nombres, en quoi il me semble qu'il est extrêmement versé. Je lui ai envoyé (1) les belles propositions sur les progressions géométriques qui commencent à l'unité, lesquelles j'ai non seulement trouvées, mais encore démontrées, bien que la démonstration en soit assez cachée, ce que je vous prie d'essayer, puisque vous les avez vues.

3. Mais voici ce que j'ai découvert (2) depuis sur le sujet de la proposition 12 du cinquième Livre de Diophante, en quoi j'ai suppléé ce que Bachet avoue n'avoir pas su, et rétabli en même temps la corruption du texte de Diophante, ce qui seroit trop long à vous déduire. Il suffit que je vous donne ma proposition et que je vous fasse plutôt souvenir que j'ai autrefois démontré (3) qu'*un nombre moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire n'est ni quarré, ni composé de deux quarrés, ni en entiers ni en fractions.* J'en demeurai pour lors là, bien qu'il y ait beaucoup de nombres plus grands de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui pourtant ne sont ni quarrés, ni composés de deux quarrés, comme 21, 33, 77, etc., ce qui a fait dire à Bachet sur la division proposée de 21 en deux quarrés : *quod quidem impossibile est, ut reor, cùm is neque quadratus sit, neque suapte natura compositus ex duobus quadratis,* où le mot de *reor* marque évidemment qu'il n'a point su la démonstration de cette impossibilité, laquelle j'ai enfin trouvée et comprise généralement dans la proposition suivante :

4. *Si un nombre donné est divisé par le plus grand quarré qui le mesure, et que le quotient se trouve mesuré par un nombre premier moindre*

(1) *Voir* Lettre XL, 6.
(2) *Voir* Tome I, *Observations* XXV et XXVI sur Diophante.
(3) Cette proposition avait été, en même temps que le second théorème énoncé Lettre XII, 3, envoyée par Mersenne à Descartes, le 22 mars 1638, comme démontrée par Fermat.

de l'unité qu'un multiple du quaternaire, le nombre donné n'est ni quarré, ni composé de deux quarrés, ni en entiers, ni en fractions.

Exemple : Soit donné 84. Le plus grand quarré qui le mesure est 4, le quotient 21, lequel est mesuré par 3 ou bien par 7, moindres de l'unité qu'un multiple de 4. Je dis que 84 n'est ni quarré, ni composé de deux quarrés, ni en entiers, ni en fractions.

Soit donné 77. Le plus grand quarré qui le mesure est l'unité; le quotient 77, qui est ici le même que le nombre donné, se trouve mesuré par 11 ou par 7, moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire. Je dis que 77 n'est ni quarré, ni composé de deux quarrés, ni en entiers ni en fractions. Etc.

Je vous avoue franchement que je n'ai rien trouvé en nombres qui m'ait tant plu que la démonstration de cette proposition, et je serai bien aise que vous fassiez effort de la trouver, quand ce ne seroit que pour apprendre si j'estime plus mon invention qu'elle ne vaut.

5. J'ai démontré ensuite cette proposition, qui sert à l'invention des nombres premiers :

Si un nombre est composé de deux quarrés premiers entre eux, je dis qu'il ne peut être divisé par aucun nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire.

Comme, par exemple, ajoutez l'unité, si vous voulez, à un quarré pair, soit le quarré 10 000 000 000, lequel avec 1 fait 10 000 000 001. Je dis que 10 000 000 001 ne peut être divisé par aucun nombre premier moindre de l'unité qu'un multiple de 4, et ainsi, lorsque vous voudrez éprouver s'il est nombre premier, il ne faudra point le diviser ni par 3, ni par 7, ni par 11, etc.

6. Si ne faut-il pas oublier tout à fait la Géométrie. Voici ce qu'on m'a proposé et que j'ai trouvé tout aussitôt :

Per datum extra vel intra parabolen punctum, rectam ducere quæ abscindat segmentum a parabole æquale dato spatio. Et, si punctum sit

intra parabolen, determinare minimum quod a parabole per dictum punctum abscindi possit spatium.

Si vous ne rencontrez pas d'abord la construction, je vous ferai part de la mienne.

J'attends de vos nouvelles et suis etc.

XLIII.

FERMAT A FRENICLE (1).

< AOUT? 1640 >

(A. f° 7).

1. Soit par exemple la progression double depuis le binaire avec ses exposants au-dessus :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536

Je dis que, si vous augmentez les nombres de la progression de l'unité, et que vous fassiez 3, 5, 9, 17, etc., tous les dits nombres progressifs ainsi augmentés, qui se trouveront avoir pour exposants des nombres qui ne sont pas de la dite progression double, seront nombres composés.

2. Bien qu'on puisse faire une anatomie particulière qui est trop longue à décrire, il suffit de vous faire comprendre, dans l'exemple qui suit, la proposition que j'y ai faite :

Soit le nombre progressif augmenté de l'unité 8193, duquel l'exposant est 13 nombre premier. Je dis que, si vous divisez 8193 par 3, le

(1) Fragment publié par M. Ch. Henry (*Recherches etc.*, p. 192-193) d'après le brouillon d'Arbogast. Il porte sur la copie au net le titre : *Sur les nombres premiers de Fermat à Frenicle*, et la mention : *D'après la copie de Mersenne.*

quotient ne pourra être divisé que par un nombre qui surpasse de l'unité ou le double de 13 exposant susdit, ou un multiple dudit double de 13, etc., à l'infini.

Que si l'exposant est un nombre composé, qui pourtant ne soit pas un de ceux de la progression double, je puis trouver tous les diviseurs fort aisément.

3. Mais voici ce que j'admire le plus : c'est que je suis quasi persuadé (¹) que tous les nombres progressifs augmentés de l'unité, desquels les exposants sont des nombres de la progression double, sont nombres premiers, comme

3 5 17 257 65537 4 294 967 297

et le suivant de 20 lettres

18 446 744 073 709 551 617; etc.

Je n'en ai pas la démonstration exacte, mais j'ai exclu si grande quantité de diviseurs par démonstrations infaillibles, et j'ai de si grandes lumières, qui établissent ma pensée, que j'aurois peine à me dédire.

XLIV.

FERMAT A FRENICLE.

JEUDI 18 OCTOBRE 1640.

(*Va*, p. 162-164.)

MONSIEUR,

1. Les vacations, qui m'ont éloigné de Toulouse, m'ont en même temps éloigné de mon devoir et empêché de vous écrire plus tôt depuis

(¹) C'est là le plus ancien énoncé donné par Fermat de la célèbre proposition dont Euler a reconnu la fausseté. *Voir* Tome I, page 131, note 1. Le sixième nombre ($2^{32}+1$) indiqué ici par Fermat comme premier est divisible par 641. Le septième ($2^{64}+1$) est divisible par 274 177.

la dernière de vos lettres en date du 21 septembre ([1]). Je tâcherai de réparer par celle-ci la longueur de l'attente et commencerai par la liberté que je prends de vous dire que je n'ai point vu encore aucune proposition de votre part que je n'eûsse plus tôt trouvée et considérée; et afin de vous rendre vous-même juge de cette vérité, et vous ôter en même temps le scrupule que vous pourriez avoir, que je n'en use comme quelqu'un de ceux du lieu où vous êtes, qui s'attribue impunément les inventions d'autrui, après qu'elles lui ont été communiquées, je commencerai par la proposition ([2]) de la différence de deux quarrés, que vous trouverez dans Bachet sur le Diophante, au commentaire de la proposition 11 du deuxième Livre, en même façon que vous me l'avez envoyée, vous avouant pourtant que l'application, que j'estime beaucoup, est toute vôtre et que je l'ai apprise de vous.

2. Pour le sujet des progressions, je vous avois envoyé par avance ([3]) les propositions qui servent à déterminer les parties des puissances — 1, et, par ma seconde Lettre ([4]), je vous avois fait comprendre que j'avois considéré toutes les propositions qui servent aux puissances + 1, de quoi je m'étois contenté de vous donner deux exemples, dont l'un étoit démontré par moi et par conséquent connu nécessairement, et l'autre ne m'étoit point entièrement connu par raison démonstrative, bien que je vous assurasse que je n'en doutais pas.

Or, pour venir à la connoissance de ce dernier, quoiqu'imparfaite encore et non achevée, je ne le pouvois sans avoir plus tôt examiné et prouvé par démonstrations toutes leurs propositions contenues en votre dernière, ce que vous n'aurez nulle peine de croire, puisque le seul exemple que je vous envoyai le marquoit assez, auquel j'ajoutois qu'en toutes progressions on pouvoit déterminer les diviseurs communs et généraux avec pareille aisance.

Mais je vous avoue tout net (car par avance je vous avertis que,

([1]) Lettre perdue.
([2]) Construction de deux carrés entiers ayant une différence donnée.
([3]) *Voir* Lettre XL, 6.
([4]) Lettre XLIII.

comme je ne suis pas capable de m'attribuer plus que je ne sais, je dis avec même franchise ce que je ne sais pas) que je n'ai pu encore démontrer l'exclusion de tous diviseurs en cette belle proposition que je vous avois envoyée et que vous m'avez confirmée, touchant les nombres 3, 5, 17, 257, 65537, etc. Car, bien que je réduise l'exclusion à la plupart des nombres et que j'aie même des raisons probables pour le reste, je n'ai pu encore démontrer nécessairement la vérité de cette proposition, de laquelle pourtant je ne doute non plus à cette heure que je faisois auparavant. Si vous en avez la preuve assurée, vous m'obligerez de me la communiquer; car, après cela, rien ne m'arrêtera en ces matières.

3. Reste à vous parler de la proposition fondamentale des parties aliquotes, laquelle m'étoit tellement connue que je vous l'avois envoyée par la première lettre que je vous écrivis (1), laquelle on m'a dit depuis s'être égarée. Pourtant, si le Père Mersenne veut prendre le soin de la faire chercher dans le bureau de la poste, elle se trouvera dans un paquet que j'adressois à M. ... (2).

Outre que cette proposition est si naturelle, qu'il est impossible de déterminer et de trouver la moindre chose sur ce sujet, qu'elle ne se présente d'abord; de sorte qu'ayant depuis fort longtemps trouvé et envoyé les propositions des deux nombres 17 296 et 18 416 et autres pareilles (3), il falloit par nécessité que j'eûsse passé par la dite proposition.

Pour votre application, il me semble qu'elle n'ôte pas la longueur que je trouvois en cette sorte de questions, qui est la seule difficulté que j'y ai toujours reconnue; sinon que je ne l'aie pas bien comprise, de quoi je vous prie m'avertir et me rendre certain.

4. Il me semble après cela qu'il m'importe de vous dire le fonde-

(1) Lettre perdue, qui doit avoir été écrite entre les Lettres XL et XLIII.

(2) Carcavi?

(3) *Voir* Pièce IV_A.

ment sur lequel j'appuie les démonstrations de tout ce qui concerne les progressions géométriques, qui est tel :

Tout nombre premier [1] mesure infailliblement une des puissances — 1 de quelque progression que ce soit, et l'exposant de la dite puissance est sous-multiple du nombre premier donné — 1; et, après qu'on a trouvé la première puissance qui satisfait à la question, toutes celles dont les exposants sont multiples de l'exposant de la première satisfont tout de même à la question.

Exemple : soit la progression donnée

1	2	3	4	5	6	
3	9	27	81	243	729	etc.

avec ses exposants en dessus.

Prenez, par exemple, le nombre premier 13. Il mesure la troisième puissance — 1, de laquelle 3, exposant, est sous-multiple de 12, qui est moindre de l'unité que le nombre 13, et parce que l'exposant de 729, qui est 6, est multiple du premier exposant, qui est 3, il s'ensuit que 13 mesure aussi la dite puissance 729 — 1.

Et cette proposition est généralement vraie en toutes progressions et en tous nombres premiers; de quoi je vous envoierois la démonstration, si je n'appréhendois d'être trop long.

5. Mais il n'est pas vrai que tout nombre premier mesure une puissance + 1 en toute sorte de progressions : car, si la première puissance — 1, qui est mesurée par le dit nombre premier, a pour exposant un nombre impair, en ce cas il n'y a aucune puissance + 1 dans toute la progression qui soit mesurée par le dit nombre premier.

Exemple : parce qu'en la progression double, 23 mesure la puissance — 1 qui a pour exposant 11, le dit nombre 23 ne mesurera aucune puissance + 1 de la dite progression à l'infini.

Que si la première puissance — 1 qui est mesurée par le nombre

[1] C'est de cet énoncé qu'a été tirée la proposition connue sous le nom de *Théorème de Fermat*, à savoir que si p est premier et ne divise pas a, il divise $a^{p-1} - 1$.

premier donné a pour exposant un nombre pair, en ce cas la puissance + 1 qui a pour exposant la moitié dudit premier exposant sera mesurée par le nombre premier donné.

6. Toute la difficulté consiste à trouver les nombres premiers qui ne mesurent aucune puissance + 1 en une progression donnée : car cela sert, par exemple, à trouver quels des nombres premiers mesurent les radicaux des nombres parfaits et à mille autres choses, comme, par exemple, d'où vient que la 37^e puissance — 1 en la progression double est mesurée par 223. En un mot, il faut déterminer quels nombres premiers sont ceux qui mesurent leur première puissance — 1 en telle sorte que l'exposant de la dite puissance soit un nombre impair, ce que j'estime fort malaisé, en attendant un plus grand éclaircissement de votre part et qu'il vous plaise d'étendre cet endroit de votre lettre, où vous dites qu'après avoir trouvé que le diviseur doit être multiple + 1 de l'exposant, il y a aussi des règles pour trouver le quantième des dits multiples + 1 de l'exposant doit être le diviseur.

7. Voici une mienne proposition (que peut-être vous aurez aussi trouvée) que j'estime beaucoup, bien qu'elle ne découvre pas tout ce que je cherche, que sans doute j'achèverai d'apprendre de vous :

En la progression double, si d'un nombre quarré, généralement parlant, vous ôtez 2 ou 8 ou 32 etc., les nombres premiers moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui mesureront le reste, feront l'effet requis.

Comme de 25, qui est un quarré, ôtez 2; le reste 23 mesurera la 11^e puissance — 1.

Otez 2 de 49, le reste 47 mesurera la 23^e puissance — 1.

Otez 2 de 225, le reste 223 mesurera la 37^e puissance — 1; etc.

En la progression triple, si d'un nombre quarré *ut supra* vous ôtez 3 ou 27 ou 243 etc., les nombres premiers moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui mesureront le reste, feront l'effet requis. Comme :

Otez 3 de 25, le reste 22 est divisé par 11, qui est premier et

moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire; aussi 11 mesure la 5^e puissance -1.

Otez 3 de 121; le reste 118 est mesuré par 59 moindre de l'unité qu'un multiple du quaternaire; aussi 59 mesure la 29^e puissance -1.

En la progression quadruple, il faut ôter 4 ou 64 ou 1024, etc. à l'infini en toutes progressions, en procédant de même façon.

8. J'ajouterai encore cette petite proposition.

Si d'un quarré vous ôtez 2, le reste ne peut être divisé par aucun nombre premier qui surpasse un quarré de 2.

Comme prenez pour quarré 1 000 000, duquel, ôté 2, reste 999 998. Je dis que le dit reste ne peut être divisé ni par 11, ni par 83, ni par 227 etc.

Vous pouvez éprouver la même règle aux quarrés impairs et, si je voulois, je vous la rendrois belle et générale; mais je me contente de vous l'avoir indiquée seulement.

9. Avant que finir, voici une autre proposition, laquelle vous fournira peut-être quelque application, comme vous y êtes très heureux.

Si un nombre est mesuré par un autre et que le nombre divisé soit encore divisé par un autre nombre moindre que le premier diviseur, en ce cas, si vous ôtez du quotient de la seconde division, multiplié par la différence des deux diviseurs, le reste de la seconde division, ce qui restera sera mesuré par le premier diviseur (1).

Exemple : 121 est mesuré par 11. Divisez encore 121 par 7; le quotient sera 17 et le reste de la division 2.

Multipliez le quotient 17 par 4, différence du premier et du second diviseur, et du produit 68 ôtez-en 2; reste 66 qui sera aussi mesuré par 11, premier diviseur.

10. Que si le second diviseur est plus grand que le premier, en ce

(1) C'est-à-dire que si l'on a
$$a = bq = b_1q_1 + r,$$
si l'on a $b > b_1$, b divise $q_1(b - b_1) - r$. Si au contraire $b < b_1$, b divise $q_1(b_1 - b) + r$.

cas, si vous ajoutez au quotient de la seconde division, multiplié par la différence des deux diviseurs, le reste de la seconde division, ce qui restera sera mesuré par le premier diviseur.

Exemple : 117 est mesuré par 3. Divisez encore 117 par 4; le quotient sera 29 et le reste de la division 1.

Ajoutez au quotient 29, multiplié par la différence des diviseurs (qui ne change ici rien, parce que c'est l'unité), le reste de la dite division, qui est 1; la somme 30 sera aussi mesurée par 3, premier diviseur.

J'ai déjà trop écrit et il me semble qu'il est temps que vous parliez, après avoir employé si mal votre temps à lire cette longue lettre, qui vous confirmera que je suis etc.

XLV.

FERMAT A MERSENNE.

MARDI 25 DÉCEMBRE 1640.

(A, f^{os} 12-13 *bis*, B, f^{o} 19.)

Mon Révérend Père,

1. Je languissois dans l'attente de vos lettres et de M. de Frenicle. Je suis bien aise qu'il approuve ce que j'ai fait [1]; et afin qu'il ne soit plus en doute de ce que je lui demande, voici trois questions que je lui propose, pource que les spéculations que j'y ai faites ne me satisfont pas pleinement :

1° La raison essentielle pourquoi 3, 5, 17, 257, etc. à l'infini, sont toujours nombres premiers;

2° Qu'il me donne quelqu'un de ses autres moyens pour trouver

(1) La réponse de Frenicle à la Lettre XLIV est perdue.

à l'infini des nombres premiers de tels nombres de figures qu'on voudra.

Sur quoi je voudrois être éclairci si une de mes pensées est vraie, qu'en la progression d'un nombre pair, comme 6, toutes les puissances + 1 de la progression qui ont pour exposant : 1, 2, 4, 8, 16, etc. sont nombres premiers, si elles ne sont pas mesurées par un de ceux-ci : 3, 5, 17, 257, etc.; laquelle proposition, si elle est vraie, est de très grand usage.

Si je puis une fois tenir la raison fondamentale que 3, 5, 17, etc. sont nombres premiers, il me semble que je trouverai de très belles choses en cette matière, car déjà j'ai trouvé des choses merveilleuses dont je vous ferai part, après que j'aurai eu votre réponse et celle de M. Frenicle.

3° Je lui demande un moyen plus général que celui que j'ai inventé pour savoir quels sont les multiples de l'exposant utiles à la division.

Après cela, je travaillerai aux propositions que vous me demandez.

2. Sur le sujet des triangles rectangles [1], voici mes fondements :

1° Tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple du quaternaire, est une seule fois la somme de deux quarrés, et une seule fois l'hypoténuse d'un triangle rectangle.

2° Le même nombre et son quarré sont chacun une fois la somme de deux quarrés;

Son cube et son quarréquarré sont chacun deux fois la somme de deux quarrés;

Son carrécube et son cubecube sont chacun trois fois la somme de deux quarrés;

Etc., à l'infini.

3° Ce même nombre étant une fois l'hypoténuse d'un triangle rectangle, son quarré l'est deux fois, son cube trois, son quarréquarré quatre, etc. à l'infini.

[1] *Comparer*, Tome I, l'*Observation VII sur Diophante*.

4° Étant donné un nombre, pour savoir combien de fois il est l'hypoténuse d'un triangle rectangle, divisez-le par tous les nombres premiers, plus grands de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui le mesurent. Puis rangez les exposants des puissances des dits nombres premiers qui mesurent le nombre donné, en tel ordre que bon vous semblera, l'un après l'autre. Multipliez le premier par le second deux fois, et à cela ajoutez la somme du premier et du second; puis multipliez cette dernière somme deux fois par le troisième, et ajoutez au produit tant la dite dernière somme que le troisième, etc. à l'infini. La dernière somme marquera à combien de triangles le nombre donné peut servir d'hypoténuse.

Les nombres premiers qui sont moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, ni 2, non plus que leurs puissances, ne font rien à la question, et n'augmentent ni ne diminuent le nombre des dits triangles rectangles.

Soit, par exemple, un nombre donné mesuré par 5, par le quarré de 13, par le cube de 17, et par le cube aussi de 29.

Nous aurons quatre diviseurs dont les exposants de leurs puissances, qui mesurent le nombre donné, sont :

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 3.$$

Je multiplie le premier par le second deux fois : viendra 4; ajoutez-y le premier et le second : viendra 7. Je multiplie 7 par le troisième 3 deux fois : viendra 42, auquel ajoutant 7 et 3, c'est 52. Je multiplie 52 par le quatrième (qui est 3) deux fois : viendra 312, auquel ajoutant 52 et 3, viendra 367.

Je dis donc que le nombre donné sera l'hypoténuse de 367 triangles rectangles et non plus.

5° Pour trouver, par exemple, le moindre nombre de tous ceux qui sont 367 fois seulement l'hypoténuse d'un triangle rectangle, je double le nombre donné et au dit double j'ajoute l'unité : viendra 735, duquel je prends tous les diviseurs séparément. Quoiqu'un nombre mesure et par soi et par ses puissances, j'entends tous les diviseurs qui

sont nombres premiers; le dit nombre se trouve donc divisé aux dites conditions par 3, 5, 7, 7. J'ôte de chacun des dits diviseurs l'unité et prends la moitié du reste : viendra 1, 2, 3, 3.

Il faut donc prendre quatre nombres premiers plus grands de l'unité qu'un multiple du quaternaire, et prendre leurs puissances exposées par les dits quatre nombres. En quoi faisant, vous satisferez à la question généralement en multipliant les dites quatre puissances entre elles.

Que si vous voulez le moindre nombre satisfaisant à la question, il faudra prendre les quatre plus petits nombres premiers de la qualité requise, qui sont : 5, 13, 17, 29, et pour leurs puissances, il faut que celle du plus petit ait le plus grand exposant, et ainsi des autres. Nous prendrons donc le cube de 5, le cube de 13, le quarré de 17, et 29, et multipliant tous les uns par les autres, nous aurons le moindre nombre de tous ceux qui servent d'hypoténuse à 367 triangles rectangles et non plus.

3. Il s'ensuit de là que si le double du nombre donné, plus 1, est nombre premier, en ce cas le nombre cherché ne peut être divisé que par un seul nombre premier plus grand de l'unité qu'un multiple du quaternaire.

Comme si vous demandez un nombre qui serve d'hypoténuse à 20 triangles rectangles et non plus, pource que 41 est nombre premier, il faut prendre la 20^{e} puissance d'un nombre premier de la qualité requise.

Vous trouverez, par conséquence aisée, un nombre qui ait autant de diviseurs différents que vous voudrez et qui puisse satisfaire à la question, lorsqu'elle est possible. J'entends des diviseurs de la qualité requise, car vous y en pouvez mettre, comme nous avons dit, autant que vous voudrez de ceux qui sont moindres de l'unité qu'un multiple de 4, ou bien 2 et telle de ses puissances que vous voudrez.

Je vous écris ceci si fort à la hâte que je ne prends pas garde si je fais des fautes, et omets beaucoup de choses dont je vous dirai le menu une autre fois.

4. Pour la *question des ellipses* [1], elle se déduira fort aisément de ce que vous venez de voir, car la question va là *à trouver un nombre qui serve d'hypoténuse à 12 triangles et non plus, de telle qualité que la dite hypoténuse ait plus grande proportion au plus grand des deux autres côtés que le dit plus grand au moindre :* c'est-à-dire que chacun des dits triangles soit comme, par exemple, 29, 21, 20. Ce qui est aisé, et ayant trouvé le dit nombre, son quarré sera le demi-diamètre des ellipses.

Il le faut quarrer, afin que la perpendiculaire sur le foyer soit un nombre entier. J'en dis assez pour me faire entendre à M. Frenicle.

5. J'ajoute encore qu'une toute pareille règle à la précédente des hypoténuses sert à cette question :

Étant donné un nombre, déterminer combien de fois il est la différence de deux nombres desquels le produit est un nombre quarré.

Et n'y a que cette différence, qu'en cette question tous les nombres premiers hormis 2 sont utiles, ce qui n'est pas en la précédente des hypoténuses.

Comme, si un nombre est mesuré par 3 et par le quarré de 5, les exposants étant 1 et 2, multipliez le premier par le second deux fois, à quoi ajoutant leur somme, viendra 7. Vous pouvez donc assurer que 75 est 7 fois la différence de deux nombres desquels le produit fait un quarré.

Pour avoir le plus petit, vous userez de même voie.

Or, pour trouver tous les triangles et aussi les dits nombres en cette

[1] *Voir* sur cette question, antérieurement proposée par Frenicle à Descartes, les *Lettres* de ce dernier, du 20 décembre 1638 (éd. Clerselier, II, 95), du 9 février 1639 (II, 97), du 30 avril 1639 (III, 84). Frenicle avait demandé de construire sur le même grand axe ($2a$) un nombre déterminé d'ellipses telles que pour chacune la distance des foyers ($2c$) fût supérieure au petit axe ($2b$) et qu'on pût exprimer en nombres entiers le grand axe, le petit axe, la distance ($a - c$) d'un foyer au sommet voisin, et l'excès $\left(\frac{a^2+c^2}{a}\right)$, sur la distance des foyers, de la distance de l'un d'eux à l'extrémité de l'ordonnée passant par l'autre.

question, la chose est assez aisée, de quoi je vous écrirai séparément, si vous voulez.

De cette dernière question, on peut tirer l'invention d'hyperboles au lieu d'ellipses, etc.

Dès que M. de Frenicle m'aura écrit, je lui donnerai des propositions que je juge, sans me flatter, qu'il estimera incomparablement plus belles que tout ce dont nous avons encore parlé.

Je suis,

Mon Révérend Père,

Votre très humble serviteur,

Fermat.

A Toulouse, ce 25 décembre 1640.

ANNÉE 1641.

XLVI.

FERMAT A MERSENNE (1).

MARDI 26 MARS 1641.

(A, f° 34; B, f° 24 v°.)

Mon Révérend Père,

1. Les occupations que les procès nous donnent sur la tête m'ont empêché de pouvoir lire à loisir les Traités (2) que vous m'avez fait la faveur de m'envoyer. Je me réserve d'y vaquer avec soin aussitôt après Pâques, et ce sera alors que je vous satisferai et vous marquerai avec liberté mes sentiments.

2. Je suis toujours dans l'attente de la réponse de M. de Frenicle (3), et en tout cas, vous m'obligerez de me renvoyer ma démonstration (4) pource que je n'en ai point gardé de copie. Comme aussi je serai bien aise qu'il vous plaise m'envoyer ma copie de mon *Isagoge ad locos*, de

(1) Lettre inédite.

(2) Mersenne faisait alors notamment circuler (*Lettres de Descartes*, éd. Clerselier. II, 44, du 28 octobre 1640 à Mersenne; MS. B, f° 29 v° et suiv., lettre inédite de Pujos à Mersenne du 9 mai 1641), avec l'opuscule de Fermat *Doctrinam tangentium* (Tome I, p. 158 et suiv.) : 1° un Traité *des cercles qui se font dans l'eau;* 2° un autre *pour le mouvement journalier de la terre;* 3° la lettre de Beaugrand contre Desargues (*Œuvres de Desargues*, éd. Poudra, II, p. 355 et suiv.).

(3) Réponse à la Lettre XLV?

(4) Démonstration perdue.

son *Appendix* et *De inventione tangentium in curvis* ([1]), m'étant engagé envers M. Despagnet de les lui faire voir.

3. Excusez l'importunité à laquelle je me trouve engagé par ma négligence. Voici, en revanche de la peine que je vous donne, une belle proposition tirée de mes Lieux *ad superficiem* ([2]) et qui n'est qu'une suite d'une des propositions du Traité entier :

Soit une sphère donnée et en icelle décrit un solide régulier. Je dis que, si vous prenez un point à discrétion dans toute la superficie de la sphère, et que de ce point vous tiriez des lignes à tous les angles du solide régulier, les quarrés de toutes ces lignes pris ensemble seront égaux à un espace donné.

Comme, si vous en désirez un exemple, soit une sphère donnée et en icelle décrit un tétraèdre. Je dis que, si vous prenez un point à discrétion dans toute la surface de la sphère, et que de ce point vous tiriez quatre lignes aux quatre angles du tétraèdre, les quarrés de ces quatre lignes pris ensemble feront un espace qui sera double du quarré du diamètre de la sphère. Etc.

La démonstration n'est pas malaisée et se tire facilement de celle d'une autre proposition que j'envoyai il y a longtemps à M. de Roberval ([3]).

Je suis, mon Révérend Père,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 26 mars 1641.

([1]) *Voir* Tome I, pages 91 et suiv.; 103 et suiv.; 158 et suiv.; le dernier titre doit en effet désigner l'écrit *Doctrinam tangentium*.

([2]) *Voir* Tome I, pages 111 et suiv. L'énoncé qui suit est un cas particulier du théorème général : *Si a quotcumque punctis*, page 113.

([3]) *Voir* Lettre XIX.

XLVII.

FERMAT A MERSENNE (1).

SAMEDI 15 JUIN 1641.

(A, f° 14; B, f° 15 v°.)

Mon Révérend Père,

1. Je tâche de contenter assez amplement la curiosité de M. de Frenicle par la Lettre que vous trouverez dans votre paquet (2). Il m'a pourtant demandé la solution d'une question (3) que je diffère de lui envoyer jusqu'à ce que je serai de retour à Toulouse, me trouvant présentement à la campagne où j'aurois besoin de beaucoup de temps pour refaire ce que j'ai écrit sur ce sujet et que j'ai laissé dans mon cabinet.

Voici pourtant un échantillon de cette question générale, que vous lui pourrez faire voir par avance :

En la progression de 3, tous les nombres premiers, qui sont différents par l'unité d'un multiple de 12, mesurent seulement les puissances — 1. Tels sont : 11, 13, 23, 37, etc.

En la même progression, les nombres premiers, qui sont différents par 5 d'un multiple de 12, mesurent les puissances + 1. Tels sont : 5, 17, 19, etc.

En la progression de 5, tous les nombres premiers, qui finissent par 1 ou par 9, mesurent seulement des puissances — 1. Tels sont : 11, 19, etc.

Ceux qui finissent par 3 ou par 7 mesurent des puissances + 1. Tels sont : 7, 13, 17, etc.

Vous aurez une autre fois la règle générale en toute sorte de progressions.

(1) Lettre inédite.
(2) *Voir* Pièce XLVIII ci-après.
(3) *Voir* Lettres XLVIII, 12 et XLIX, 12.

2. J'attends maintenant qu'il vous plaise m'envoyer la copie de mes Traités ([1]) que je vous ai si souvent demandée pour M. Despagnet.

Je suis, mon Révérend Père,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

Ce 15 juin 1641.

3. Depuis avoir écrit la lettre de M. Frenicle, j'ai trouvé la dernière question que je lui fais ([2]) :

Étant donné un nombre, déterminer combien de fois il peut être la somme des deux petits côtés d'un triangle rectangle.

S'il la veut, je lui en ferai part, et serai cependant bien aise de voir sa solution.

XLVIII.

FERMAT A FRENICLE ([3]).

< 15 JUIN 1641 >

(B, f° 26 v°-28 r°.)

1. La proposition fondamentale des triangles rectangles est que tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple de 4, est composé de deux quarrés ([4]).

([1]) *Voir* Lettre XLVI, 2.

([2]) *Voir* Lettre XLVIII, 11.

([3]) Cette pièce inédite, reproduite d'après une copie qui ne porte ni adresse ni date, ne doit être considérée que comme un extrait d'une Lettre de Fermat. Cette Lettre était évidemment adressée à Frenicle, dont nous avons la réponse (ci-après XLIX), datée du 2 août 1641. Le post-scriptum de la Lettre XLVII ci-avant, adressée à Mersenne le 15 juin 1641, prouve d'ailleurs que le présent extrait a bien été fait sur la Lettre pour Frenicle, mise par Fermat dans le paquet envoyé à cette date au Minime. L'auteur de l'extrait n'a copié que ce qui lui a paru avoir un intérêt mathématique et a négligé toutes les transitions d'une question à l'autre.

([4]) *Voir* Lettre XLV, 2.

2. La méthode pour trouver les triangles composés en conséquence des primitifs est dans les Livres (¹), ou s'en peut tirer aisément :

Soit le nombre donné 65, lequel je trouve être l'hypoténuse de quatre triangles, par la règle déjà envoyée (²). Les nombres premiers de la qualité requise qui le composent sont 5 et 13. Le triangle (³) de 5 est 5, 4, 3; celui de 13 est 13, 12, 5.

Je multiplie la base 12 par la base 4, vient 48; puis le petit côté 5 par l'autre 3, vient 15; et derechef 12 par 3, en croix, vient 36; puis 4 par 5, vient 20.

La somme des deux premiers produits et la différence des deux seconds font les deux petits côtés d'un des triangles cherchés, qui sera par conséquent : 65, 63, 16.

Et derechef la somme des deux derniers produits et la différence des deux premiers sont les deux petits côtés d'un autre des triangles cherchés, qui sera partant : 65, 56, 33.

(Que si, au lieu de 13, 12, 5, vous aviez pris le même 3, 4, 5, en faisant la même opération, vous n'eussiez trouvé qu'un seul triangle qui est, en mon précédent exemple : 25, 24, 7.)

Les deux autres triangles sont semblables aux deux premiers et se font, l'un en multipliant les côtés du premier par l'hypoténuse du second, et l'autre en multipliant les côtés du second par l'hypoténuse du premier; ils sont donc : 65, 52, 39; 65, 60, 25.

3. Cette méthode est générale, de sorte que toute la difficulté consiste à trouver les triangles primitifs, lorsque le nombre premier qui leur sert d'hypoténuse est donné, et cette question se réduit à la suivante déjà proposée (⁴) :

Étant donné un nombre premier qui surpasse de l'unité un multiple de 4, trouver les deux quarrés qui composent le dit nombre.

(¹) Fermat va simplement en effet exposer la méthode de Diophante, III, **22**, pour construire quatre triangles ayant une même hypoténuse.
(²) Dans la Lettre XLV, **2**, 4°.
(³) Le triangle qui a 5 pour hypoténuse.
(⁴) Probablement dans un passage non conservé de la présente Lettre.

Car si l'on n'a ces deux quarrés, on ne sauroit trouver le triangle primitif. Mais ce problème, de trouver ces deux quarrés, est aussi malaisé que de tâtonner, et l'ordre de la proposition précédente est grandement difficile.

4. Soit un nombre impair donné, comme 15, les couples des nombres sous lesquels il est produit sont 1, 15, et 3, 5. Chacun de ces deux couples le fait être un des petits côtés d'un triangle rectangle, car le premier couple ([1]) produit le triangle : 113, 112, 15; et le second couple produit le triangle : 17, 15, 8 (j'entends des triangles non composés).

Au premier de ces triangles, 15 est le plus petit côté, au second, le moyen. *On demande quelle est la proportion des deux côtés qui produisent un nombre impair, au-dessus de laquelle le dit nombre impair soit le petit côté, et au-dessous le moyen.*

Je réponds qu'il est impossible de le déterminer exactement en nombres entiers, parce que l'équation d'algèbre produit des nombres irrationaux, quoiqu'on en puisse approcher à l'infini de plus en plus par nombres entiers.

Par exemple : si les deux côtés qui produisent l'impair sont entre eux en proportion moindre que de 2414213 à 1000000 ou égale, le nombre impair fera le moyen côté; que si les deux côtés qui produisent l'impair sont en proportion plus grande que de 2414214 à 1000000 ou égale, le nombre impair fera le petit côté.

On peut approcher ces deux proportions à l'infini, mais non en termes précis; elle sera ([2]) en termes irrationaux, savoir de 1 à 1 + Rq. de 2.

5. Il y a des triangles qui se peuvent diviser en deux, et subdiviser

([1]) En thèse générale, suivant le langage de Diophante, un triangle rectangle en nombre a, b, c, est dit formé des deux nombres p et q, si l'on a

$$a = p^2 + q^2, \qquad b = p^2 - q^2, \qquad c = 2pq,$$

relations qui entraînent l'égalité $a^2 = b^2 + c^2$. Mais ici, comme Fermat veut des nombres premiers entre eux et que a, b, c seraient pairs, il prend leurs moitiés.

([2]) Fermat renverse la proportion qu'il a indiquée plus haut.

en quatre, seize et ainsi tant que l'on veut, toutes les lignes des divisions demeurant commensurables en nombres entiers ([1]).

Si l'on entend que l'aire du triangle est double, comme celle de 17, 15, 8, qui est double de l'aire de 13, 12, 5, cela est aisé et se peut ainsi énoncer :

Étant donnés deux nombres entiers, trouver deux triangles, desquels les aires soient en proportion de deux nombres donnés.

Il y a quatre règles pour soudre cette question en ce sens ([2]).

6. Il y a des triangles dont les moindres côtés ne diffèrent jamais que de l'unité, comme 3, 4, 5; 20, 21, 29, lesquels se forment sur un des termes par règle infaillible à l'infini. Car il ne faut qu'ajouter le double de l'hypoténuse à la somme des deux autres côtés, et le tout, ajouté au moindre côté, fait le côté moindre du triangle requis. Ajoutez-y l'unité, vous aurez le moyen.

Exemple : le double de 29 est 58; ajoutez-y la somme des deux petits côtés, savoir 41, vient 99, auquel ajoutez 20, qui est le petit côté; vient 119, auquel ajoutez l'unité, vous aurez 119 et 120 pour les deux moindres côtés du triangle requis, qui sera : 119, 120, 169.

L'hypoténuse se fait du triple de l'hypoténuse et du double de la somme des deux autres côtés. Le triple de l'hypoténuse est 87, le double de la somme des autres côtés 82, lequel, avec 87, fait 169, qui est l'hypoténuse requise.

Nous avons donc tiré du triangle : 20, 21, 29, celui-ci : 119, 120, 169; de celui-ci, nous en tirerons un autre à l'infini.

Même méthode pour trouver un triangle, la différence des moindres côtés duquel soit un nombre donné. J'omets les règles et les limitations pour trouver tous les possibles de la qualité requise, car la règle est aisée, en supposant les fondements.

7. Il y a des triangles auxquels le moindre côté est toujours différent d'un quarré de chacun des deux autres, comme 20, 21, 29.

([1]) *Voir* Lettre XLIX, **4**.

([2]) *Voir* l'Observation XXIX sur Diophante et ci-après, **10**, la première de ces règles.

Trouvez, par la précédente, un triangle non composé, les côtés moindres duquel diffèrent par un quarré, comme 20, 21, 29 ou tel autre.

S'il a les qualités requises, il en faut tirer deux de celui-ci par la méthode précédente, et le second qui viendra satisfera à la proposition.

Et s'il n'a pas les conditions requises, le premier qui s'en tirera, par la précédente, satisfera à la proposition.

Comme : 3, 4, 5 ne satisfait qu'à la précédente et non à celle-ci. Le premier qui s'en tirera y satisfera, à savoir : 29, 21, 20, et si de cettui-ci vous en tirez un, viendra 119, 120, 169, qui ne satisfait pas à cette question; mais celui qui s'en tirera, à savoir : 985, 697, 696, et ainsi à l'infini, alternativement, y satisfera.

8. Il y en a d'autres qui pris par couples ont leurs différences relatives ([1]) comme 11, 60, 61 et 119, 120, 169.

Pour les former, il faut trouver trois quarrés en proportion arithmétique, qui sont par exemple : 1, 25, 49. Formez l'un des triangles de la somme des côtés des premier et deuxième quarrés et du côté du second, et formez l'autre triangle de la somme des deux côtés du second et du troisième, et du côté du deuxième, vous aurez les deux triangles requis.

Autre exemple ([2]) : Soient exposés les trois quarrés en proportion arithmétique 49, 169, 289.

Les deux triangles se formeront de 20 et 7 et de 30 et 7, et seront

449, 351, 280; 949, 851, 420.

9. Trouver un nombre qui soit autant de fois qu'on voudra polygone et non plus ([3]).

([1]) C'est-à-dire deux triangles rectangles en nombres (a, b, c) (a_1, b_1, c_1), tels que l'on ait $a - b = b_1 - c_1$ et $b - c = a_1 - b_1$.

([2]) Fermat commet dans cet exemple une erreur de plume. Car, d'après sa règle, ayant les carrés 7^2, 13^2, 17^2, il devait former les triangles, l'un de $7 + 13 = 20$ et de 13, l'autre de $13 + 17 = 30$ et de 13; il aurait ainsi trouvé les triangles 569, 520, 231 et 1069, 780, 731, satisfaisant au problème proposé. *Voir* ci-après, XLIX, **6**.

([3]) Question proposée par Fermat à Frenicle. *Voir* Lettre XLIX, **7**.

10. Trouver deux triangles dont les aires soient en proportion donnée [1].

Voici la règle la plus élégante :

Soient les deux nombres qui expriment la proportion donnée, a et b. Les deux triangles se forment : le premier, de a bis $+ b$ et de $a - b$; le second, de b bis $+ a$ et de $a - b$.

Vous aurez donc deux triangles qui seront par leurs aires en proportion donnée. Car, si vous les demandez de 5 à 3, les deux triangles se formeront, le premier de 13 et 2, le second de 11 et 2, et les deux triangles seront : 173, 165, 52 | 125, 117, 44.

11. Étant donné un nombre, trouver combien de fois il peut être la somme des deux petits côtés d'un triangle rectangle [2].

12. Règle pour déterminer les nombres premiers qui, en toute progression, mesurent les puissances — 1 seulement, ou + 1 aussi [3].

XLIX.

FRENICLE A FERMAT [4].

VENDREDI 2 AOUT 1641.

(*Va*. p. 165-168.)

MONSIEUR,

1. J'étois dans l'impatience de savoir votre retour à Toulouse, pour me donner l'honneur et le contentement de continuer nos conférences, lorsque le Révérend Père Mersenne m'en a donné avis; j'espère qu'elles dureront plus longtemps que je ne pensois, parce qu'il est survenu quelque chose qui m'arrête ici.

(1) *Voir* plus haut, **5**.
(2) Question proposée par Fermat à Frenicle. *Voir* Lettre XLVII, **3**, et XLIX, **9**.
(3) Question proposée par Frenicle à Fermat. *Voir* Lettre XLVII, **1**, et XLIX, **12**.
(4) Réponse à la Lettre précédente, XLVIII.

2. J'ai mille remerciements à vous faire de la limitation des côtés que vous m'avez envoyée [1], laquelle véritablement je prise fort. J'avois bien reconnu que la proportion étoit irrationelle et pour cela je m'étois contenté des raisons de 10 à 24 et à 25, mais vous l'entendez ici à l'infini. J'avois cru, par la lecture de votre précédente [2], par laquelle vous mandiez qu'il étoit aisé de la trouver, que vous prétendissiez de donner une raison rationelle pour cette limitation; c'est ce qui m'avoit fait dire que peut-être ne la trouveriez-vous pas si facile, parce que je la savois être impossible.

Je sais que l'Algèbre de ce pays-ci n'est pas propre pour soudre ces questions, ou pour le moins on n'a pas encore ici trouvé la manière de l'y appliquer : c'est ce qui me fait croire que vous vous êtes fabriqué depuis peu quelque espèce d'Analyse particulière pour fouiller dans les secrets les plus cachés des nombres, ou que vous avez trouvé quelque adresse pour vous servir à cet effet de celle que vous aviez accoutumé d'employer à d'autres usages.

Si la démonstration de cette limitation étoit courte, vous m'obligeriez beaucoup de me l'envoyer : car, si elle est trop longue, je ne voudrois pas que vous vous détournassiez de vos études à cette occasion.

Cette même raison, de 1 à $1+\sqrt{2}$, se peut aussi appliquer à la proportion des côtés des quarrés qui composent l'hypoténuse, mais en un sens contraire à celui des parties plus prochaines du côté impair, comme aussi elle se peut appliquer aux nombres qui composent la moitié des côtés pairs, au même sens qu'aux parties des impairs.

3. Je viens maintenant à ce qui regarde les triangles.

Les méthodes [3] que vous donnez, tant pour trouver les quarrés que les côtés des triangles qui appartiennent aux hypoténuses composées, sont véritablement fort belles, et vous avez la méthode de si bien disposer vos règles, que cela leur donne une certaine grâce qui les fait encore agréer davantage, mais elles ne suivent pas mon intention, car

(1) *Voir* XLVIII, 4.
(2) Lettre perdue.
(3) *Voir* XLVIII, 2.

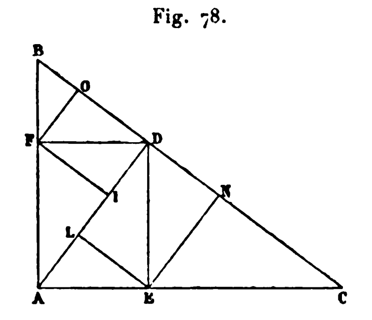
je n'ai point entendu qu'on se servît des quarrés ni des triangles des parties des hypoténuses composées, mais seulement des dites parties.

Par exemple, je demande une manière de trouver que 65 est composé des quarrés 64, 1 et 49, 16, supposant seulement qu'il a 5 et 13 pour les parties premières, sans employer à cet effet les quarrés 4 et 1, ni les côtés 3 et 4, non plus que ceux qui appartiennent à 13.

4. Des quatre propriétés des triangles que je vous avois proposées, vous avez fort bien trouvé la deuxième ([1]); pour les trois autres, vous n'avez pas suivi mon intention. Partant, il faut que je m'éclaircisse plus que je n'avois fait.

La première est facile ([2]) : Que le triangle rectangle soit ABC (*fig.* 78); il le faut diviser en deux triangles ABD, ADC avec la per-

Fig. 78.



pendiculaire AD; et derechef le triangle ADC en deux triangles EDC, EDA par la perpendiculaire DE et l'autre pareillement ABD en deux, savoir ADF, BDF, par la perpendiculaire DF; et derechef les triangles BDF, ADF, ADE, DEC par les autres perpendiculaires FO, FI, EL, EN; et continuer ainsi tant qu'on voudra et faire que toutes les lignes et sections d'icelles, comme AL, LI, ID, BO, OD, DN, NC, soient nombres entiers.

5. Vous donnez par après ([3]) les triangles dont le moindre côté est différent d'un quarré de chacun des deux autres : je sais bien que la

([1]) Lettre XLVIII, 6.
([2]) Lettre XLVIII, 5.
([3]) Lettre XLVIII, 7.

moitié de ceux qui ont 1 pour différence de leurs petits côtés ont aussi cette propriété, savoir ceux qui commencent par un nombre pair [1], mais je n'attendois pas que vous dûssiez vous servir de ceux-là, espérant que vous donneriez le moyen de les trouver tous : et, afin d'exclure les susdits, on pourroit ainsi proposer le problème :

Donner tous les triangles qui ont un quarré pour différence de leur petit côté à chacun des deux autres côtés, en sorte que l'une des différences ne puisse pas mesurer l'autre.

6. Pour l'autre propriété des triangles [2], qui est d'avoir un autre triangle relatif en différences, en sorte que la différence des deux grands côtés du premier soit celle des deux petits côtés du second, et la différence des deux petits côtés du premier soit celle des deux grands côtés du second, comme on voit aux triangles :

	49		1				1		49	
11		60		61	⋮	119		120		169,

vous n'avez pas considéré attentivement cette proposition, car les triangles que vous donnez :

	98		71				98		431	
449		351		280	⋮	949		851		420,

n'ont pas cette propriété, mais en ont une autre, qui est que les grands côtés de chacun ont pareille différence, savoir 98, et en outre que les deux hypoténuses ont pareille différence que les deux grands côtés. Mais ce n'est pas ce que je demande, car aux triangles

	49		1				1		49	
11		60		61	et	119		120		169,

vous voyez que 120 et 169 n'ont pas même différence que 60 et 61, ni 61 et 169 même différence que 60 et 120. Il faudroit donc, pour satisfaire à la question, qu'en vos triangles il y eût même différence de 449 à 351 que de 851 à 420, et de 351 à 280 que de 949 à 851.

(1) C'est-à-dire dont le plus petit côté est pair.
(2) Lettre XLVIII, 8. *Voir* les notes.

7. Vous me proposez par après (¹) de *trouver un nombre qui soit polygone autant de fois qu'on voudra et non plus.*

Je vous dirai qu'il y a quelques années que je m'étois mis à la recherche de cela, mais à peine eus-je commencé, que je m'avisai que les figures qui sont maintenant en usage sont si extravagantes, lorsqu'on les veut mettre en pratique, j'entends quand on les veut représenter avec des jetons ou des points, qu'on les nommeroit plus à propos chimères ou grotesques que figures, lesquelles, si elles ne sont entièrement régulières, au moins doivent-elles en approcher le plus que faire se peut.

Cela fut cause que je quittai ce que j'avois commencé pour me mettre à réformer ces figures, et Dieu m'a fait la grâce d'y réussir en quelque façon, car j'ai trouvé une manière de faire des figures régulières en nombres d'une infinité de sortes, et d'autres aussi qui n'ont point d'angles *ingrédiens*, de tant de côtés qu'on voudra. J'ai ensuite considéré quelques-unes de leurs propriétés et ce qui dépend d'icelles, de sorte que je ne me suis pas beaucoup arrêté aux figures communes, que je nommerois plutôt progressions de triangles que figures, à cause de l'assemblage des triangles par lequel elles sont formées. Je crois bien que ce n'est pas de ces nouvelles figures dont vous voulez parler, car possible ne vous en êtes-vous pas encore avisé; mais pour les communes, on peut considérer votre question en deux manières :

8. La première, si le nombre demandé est plusieurs fois polygone, de telle sorte qu'il enveloppe tous les polygones inférieurs, c'est-à-dire que, si ce nombre est, par exemple, heptagone, il doive aussi être hexagone, pentagone, quarré et triangle. Et ainsi, pour avoir un nombre qui fût sept fois polygone, il en faudroit donner un qui fût figure de 9, 8, 7, 6, 5, 4 et 3 côtés; ce qui seroit à la vérité fort difficile, et il faudroit un nombre fort grand pour y satisfaire, car les nombres

(¹) *Voir* Lettre XLVIII, 9. Cette question dérive de celle qui termine le Livre *Des nombres polygones* de Diophante. Fermat ne paraît pas être jamais arrivé à une solution qui l'ait satisfait.

qui sont seulement triangles, quarrés et pentagones deviennent incontinent fort grands, et c'est à cela que j'avois commencé à travailler.

L'autre considération est qu'un nombre soit polygone en plusieurs façons, sans se soucier si les polygones sont de suite ou non. Je n'ai pas encore recherché cela; si vous l'avez trouvé, vous m'obligerez de me le communiquer.

9. L'autre question que vous me faites [1] contient deux problèmes :

L'un de *choisir un nombre qui soit la somme des deux petits côtés de tant de triangles qu'on voudra et non plus;*

L'autre est de *déterminer à combien de triangles un nombre donné est la somme des deux petits côtés.*

Pour soudre ces problèmes, il faut considérer que tout nombre premier, différent de l'unité d'un nombre divisible par 8, est la somme des deux petits côtés d'un triangle, et tout nombre qui est la somme des deux petits côtés d'un triangle auquel les côtés sont premiers entre eux, diffère de l'unité d'un nombre divisible par 8.

Sur ces fondements, il faut faire la même chose avec ces nombres qu'on feroit sur les nombres premiers pairement pairs $+1$, pour trouver ce qui est requis par les problèmes, si on demandoit des hypoténuses au lieu de la somme des deux petits côtés. Il seroit superflu de déduire cela plus au long : *intelligenti loquor.*

10. Si votre méthode est autre que celle-là, vous m'obligerez de me la communiquer, et aussi de quelle façon se pourroit trouver le triangle, ayant seulement la somme de ses petits côtés sans avoir les quarrés et doubles quarrés dont elle est la différence. Car ces sommes ont cette propriété d'être toujours deux fois la différence d'un quarré et d'un double quarré; et, si cette somme est un nombre composé d'autres de même nature, comme 119 composé de 17 et 7, il sera quatre fois la différence d'un quarré et d'un double quarré.

Il faudroit aussi trouver la même chose pour l'enceinte entière des triangles que pour la somme des deux petits côtés.

(1) *Voir* Lettre XLVIII, 11.

11. Sur le sujet des triangles, voici ce que je vous proposerai encore :

Une hypoténuse composée étant donnée avec les quarrés premiers entre eux qui la composent par leur addition, trouver ses parties.

Que 221 soit l'hypoténuse donnée avec les quarrés qui la composent, savoir : 100, 121 et 196, 25, il faut trouver par le moyen d'iceux que 221 a 13 et 17 pour parties.

12. J'attends de vous la manière [1] de trouver les nombres premiers qui ne mesurent que les puissances — 1 en toute analogie, et principalement en celle de 2.

Je suis etc.

L.

FRENICLE A FERMAT [2].

VENDREDI 6 SEPTEMBRE 1641.

(*Va*, p. 169-173.)

MONSIEUR,

1. Votre règle [3] pour trouver les triangles pareils à 11, 60, 61 et 119, 120, 169, est fort bonne; je m'étois seulement arrêté à l'exemple, sans la considérer autrement.

2. Mais celle que vous mettez ensuite, pour les triangles dont le moindre côté diffère d'un quarré des deux autres [4], sert à la vérité pour trouver quelques-uns de ces triangles, mais non pas pour les trouver tous, ainsi que vous prétendez : car, prenant tous les nombres qui sont en proportion comme le quarré + 1 de quelque nombre au

(1) *Voir* Lettre XLVII, **1**.

(2) Réponse à une Lettre perdue, par laquelle Fermat avait répliqué à la précédente, XLIX.

(3) *Voir* Lettres XLVIII, **8** et XLIX, **6**.

(4) *Cp.* Lettre XLIX, **5**.

double — 2 du même nombre, on ne trouvera pas les triangles qui se font par 29 et 12 ou par 60 et 293, et une infinité d'autres; mais on les trouvera tous par la règle que vous mettez en l'écrit particulier (1) que vous avez envoyé, qui se fait mettant pour un des nombres constitutifs du triangle un nombre composé de deux quarrés premiers entre eux et de divers ordres.

Et cette dernière méthode sert à trouver tous les primitifs dont les côtés des quarrés (2) sont comme d'un nombre impair à un autre nombre. Par exemple, on trouvera par icelle qu'il y a deux triangles où les côtés des quarrés sont comme de 65 à un autre nombre, et dont le moindre côté est différent d'un quarré des deux autres : savoir les deux qui sont faits de 65 et 14 et de 65 et 24 et les autres qui sont en même proportion.

Mais si on vouloit tous les triangles primitifs dont les racines des quarrés sont comme d'un nombre pair à un impair, comme par exemple de 60 à quelque autre nombre, on n'y pourroit pas satisfaire par cette seconde règle, sinon après un long tâtonnement (3), et la première règle ne donne que la raison de 60 à 1861; mais il y a encore trois autres proportions, outre celle-là, qui ont toutes 60 pour un de leurs termes.

J'ai deux règles différentes dont chacune donne tous les triangles

(1) Écrit perdu. — La première règle de Fermat consiste à prendre pour les nombres servant à former le triangle rectangle (*voir* page 223, note 1)

$$p = r^2 + 1, \qquad q = 2r - 2.$$

La seconde règle à prendre, r et s étant premiers entre eux,

$$p = r^2 + s^2, \qquad q = 2(r - s)s.$$

(2) Frenicle appelle ici *côtés* ou *racines des quarrés* les nombres servant à former le triangle rectangle, désignés par p et q dans la note précédente.

(3) Si l'on pose

$$p = \frac{r^2 + 1}{2} \qquad \text{et} \qquad q = r - 1,$$

et que l'on fasse $q = 60$, on aura

$$r = 61, \qquad p = 1861.$$

Les trois autres proportions sont

60, 293; 60, 269; 60, 157.

susdits, avec cette différence que l'une regarde la proportion qui commence par un pair et l'autre celle qui commence par un impair.

Et celle-ci n'est pas beaucoup différente de votre dernière (1), car, ayant pris un triangle primitif, je me sers de son hypoténuse pour le premier terme, et pour l'autre, j'ôte d'un des côtés du triangle la différence de l'autre côté à l'hypoténuse.

Exemple : Que 20, 21, 29 soit le triangle, 29 le premier terme; pour l'autre, j'ôte de 20 la différence de 21 à 29, ou de 21 la différence de 20 à 29, et restera 12. On aura donc 29 et 12 dont les quarrés composeront le triangle cherché.

3. Votre première règle (2) pour trouver trois quarrés en proportion arithmétique a le même défaut que la précédente, car on ne les peut pas trouver tous par icelle. Par exemple, on ne trouvera pas les quarrés de 1, 29, 41, ou de 17, 53, 73. Mais, par la proposition que vous mettez en l'écrit particulier, on les peut tous comprendre.

Vous pouviez aussi donner aisément par la première règle le troisième quarré, sans obliger à prendre la différence des deux quarrés trouvés. Comme : en l'exemple que vous apportez, le quarré — 2 de 5 est 23; le quarré suivant + 1 est 37 : si on veut avoir le troisième nombre, il faut ajouter à 37 le double de 5, et on aura 47.

Si on prenoit 4, son quarré — 2 est 14; le quarré suivant + 1 est 26, auquel ajoutant 8, double de 4, on aura 34. Les trois nombres, étant réduits, sont 7, 13, 17.

La méthode dont je me sers pour trouver ces trois quarrés proportionaux, est tout autre que celle-là (3), et voici comme on procède pour les avoir tous :

(1) Cette règle de Frenicle revient en effet à la seconde de Fermat.

(2) *Cp.* Lettre XLVIII, 8. — La règle générale de Fermat paraît avoir consisté de fait à prendre pour les racines des trois carrés les nombres $r^2 - 2s^2$, $r^2 + 2rs + 2s^2$, $r^2 + 4rs + 2s^2$. La première règle revenait à supposer $s = 1$.

(3) Cette règle de Frenicle, revenant à prendre pour les racines des trois carrés en progression arithmétique les nombres $p^2 - 2pq - q^2$, $p^2 + q^2$, $p^2 + 2pq - q^2$, concorde en réalité avec la règle générale de Fermat (*voir* note précédente), si l'on a $p = r + s$ et $q = s$.

L'hypoténuse de tout triangle primitif sera le côté du moyen quarré; la différence des deux côtés du triangle sera le moindre côté, et leur somme sera le plus grand.

Exemple : Que le triangle soit 28, 45, 53. Le moyen côté sera l'hypoténuse, 53; la différence de 28 à 45, qui est 17, sera le moindre, et leur somme, 73, sera le plus grand. On aura donc 17, 53, 73 pour les racines des quarrés cherchés.

Et si l'on prend tous les triangles, commençant par le premier : 3, 4, 5, on aura tous les dits quarrés.

4. Après cette règle générale, j'en ai considéré deux particulières, dont l'une est celle que vous proposez en l'écrit particulier, savoir que, le moindre des trois quarrés demeurant toujours le même, on ait les deux autres en une infinité de façons, et à laquelle vous croyez que je n'ai pas pris garde, quoiqu'il y ait déjà longtemps que je l'ai trouvée, lorsque je travaillois aux triangles rectangles :

Car tout nombre et chacun d'iceux est la différence des deux moindres côtés d'une infinité de triangles;

Et tout nombre premier, différent de l'unité d'un multiple de 8, ou composé desdits nombres premiers seulement, est la différence des moindres côtés d'une infinité de triangles rectangles primitifs.

Et, y ayant des voies certaines pour trouver tous les triangles qui ont une même différence en leurs moindres côtés, on aura aisément tous les quarrés susdits.

Sur quoi il faut remarquer que, si le nombre proposé, qui doit être la racine du moindre quarré des trois et qui doit être la différence des deux petits côtés du triangle, n'est divisible que par un seul nombre premier différent de 1 d'un octonaire, comme sont 7, 49, 343; 17, 289, etc., le nombre sera la différence des petits côtés de deux triangles qu'on peut nommer *surprimitifs*, pource qu'ils sont primitifs des primitifs, car d'iceux dépend l'infinité des autres triangles, et ces deux triangles sont toujours les moindres dont l'un commence par un pair et l'autre par un impair, et d'iceux se forme l'infinité des autres.

Voici la manière dont je me sers : si je veux, par exemple, avoir tous les triangles qui ont 7 de différence entre leurs moindres côtés, je cherche les deux premiers triangles qui ont cette différence, et trouve 5, 12, 13 et 8, 15, 17. Je prends les racines des quarrés de chaque triangle, savoir 3, 2 et 4, 1, et mets chaque couple en tête d'une colonne. J'ai donc pour le premier : 3, 2. Pour avoir le triangle suivant, je prends la plus grande racine du premier pour la moindre du second, savoir 3, et pour la plus grande je prends le double de la plus grande du premier, plus la moindre. Ainsi j'aurai 8, qui est double de 3, + 2. Ce 8 sera la moindre racine du troisième triangle, et la plus grande du dit troisième sera 19, qui est double de 8, + 3. On fera la même chose à l'autre couple 4, 1, et on poursuivra aussi loin qu'on voudra.

3. 2.	4. 1.
8. 3.	9. 4.
19. 8.	22. 9.
46. 19.	53. 22.
... ...	... ...

Ayant donc tous les triangles qui ont 7 pour différence de leurs moindres côtés, il sera facile, par ce qui a été dit ci-devant, de trouver tous les quarrés arithmétiquement proportionaux, dont le moindre est 49.

Si le susdit moindre quarré étoit divisible par *deux* nombres premiers de même nature que les susdits, il y auroit *quatre* souches dont tous les triangles dépendroient.

S'il étoit divisible par *trois* nombres premiers, il y en auroit *huit*, qui ne dépendroient point l'un de l'autre.

Etc.

Ainsi 161, composé de 7 et 23, est la différence des petits côtés des triangles *surprimitifs* :

19. 180. 181. | 60. 221. 229 | 279. 440. 521 | et 400. 561. 689,

et de chacun d'iceux on peut faire une infinité de triangles primitifs qui auront le même 161 pour différence, et partant, le quarré de 161

sera le moindre quarré des trois proportionaux en une infinité de sortes.

Il faut excepter l'unité de ce qui a été dit, car elle sert bien de différence à une infinité de triangles, mais elle n'a qu'une seule souche, qui est le triangle 3, 4, 5, d'où dépendent tous les autres.

On aura donc les quarrés proportionaux (¹) dont les racines sont ici :

7.	13.	17.	7.	17.	23.
7.	73.	103.	7.	97.	137.
7.	425.	601.	7.	565.	799.
7.	2477.	3503.	7.	3293.	4657.
..	.....	.....	..	.....	.....

et on les peut continuer tant qu'on voudra en continuant les triangles.

Voilà donc pour la première chose qui appartient aux dits quarrés.

5. La seconde est de trouver les dits trois quarrés en telle sorte qu'ils soient comme enchaînés l'un à l'autre et que le dernier et plus grand des trois soit le premier des trois suivans : comme on peut voir en ces colonnes, la fabrique desquelles je vous envoierai au premier voyage; toutefois j'estime que par l'inspection vous la jugerez aisément.

1.	5.	7.	7.	17.	23.	1..	29.	41
7.	13.	17.	23.	37.	47.	41.	85.	113.
17.	25.	31.	47.	65.	79.	113.	173.	217.
31.	41.	49.	79.	101.	119.	217.	293.	353.
49.	61.	71.	119.	145.	167.	353.	445.	521.
71.	85.	97.	167.	197.	223.	521.	629.	721.
97.	113.	127.	....	....	....	....	....	....
...	....	....	....	....	....	....	....	....

Il y a aussi des voies pour avoir les différences égales desdits quarrés : car, en la première colonne, si on multiplie 24 par les sommes de tous les quarrés, lesquelles sommes sont 1, 5, 14, 30, etc., on aura

(¹) Frenicle reprend la construction de trois carrés en progression arithmétique d'après les séries de triangles commençant par 5, 12, 13; 8, 15, 17.

les différences des quarrés, et en la seconde colonne, il faudroit multiplier 24 par les sommes des seuls quarrés impairs.

Il y a d'autres choses à considérer là-dessus, que je n'ai pas maintenant le loisir de déduire plus au long.

6. Me voici maintenant à l'endroit de votre Lettre, auquel vous parlez des nombres qui sont la somme des deux petits côtés d'un triangle (1) et, sur ce sujet, je vous dois ôter de l'opinion que vous avez que je ne sûsse pas que chacun de ces nombres peut servir de différence à une infinité de quarrés et de doubles quarrés. Vous vous êtes fondé sur un avertissement que je donnois, que les dits nombres sont toujours deux fois la différence d'un quarré et d'un double quarré; mais je n'ai pas dit qu'ils fûssent seulement deux fois la différence d'un quarré et d'un double quarré, comme vous croyez avoir lu. Il faudroit avoir bien peu de pratique aux nombres pour ne s'être pas aperçu d'abord que 7 est quatre fois la différence entre de fort petits nombres : savoir entre 1 et 8, 2 et 9, 18 et 25, 25 et 32. Et je ne vous ai pas coté cela pour une propriété des dits nombres; mais, vous ayant demandé le moyen de trouver le triangle dont un nombre donné est la somme des côtés, sans avoir les quarrés et doubles quarrés dont il est la différence (2), il falloit vous avertir que les dits nombres étoient toujours deux fois la différence d'un quarré et d'un double quarré.

Car il y a deux couples dont je me sers pour avoir le dit triangle. Par exemple, pour avoir le triangle dont 7 est la somme des deux côtés, je me sers de 1 et 8, et de 2 et 9. Et, pource que j'étois pressé, je n'eus pas le loisir de m'éclaircir davantage. Je n'entends pas que les dits couples soient 2, 9 et 18, 25, comme vous avez cru, mais 1, 8 et 2, 9; et ce que j'observe en ceci est que les dites sommes sont deux fois la différence d'un quarré et d'un double quarré, en chaque couple desquels il y a un nombre moindre que la différence donnée : savoir, à un des couples le quarré est moindre, et à l'autre couple c'est le

(1) *Voir* Lettres XLVIII, **11**, et XLIX, **9**.
(2) *Voir* Lettre XLIX, **10**.

double quarré. Cela s'observe toujours ainsi; et aux nombres qui sont composés de *deux* nombres premiers, comme 119, il a *quatre* couples, dont un des nombres est moindre que 119. Et voilà la méthode dont je me sers pour voir quels sont les couples utiles pour faire les triangles, car ce sont ceux auxquels un des nombres est moindre que la différence.

Ainsi, à 17, les deux couples utiles sont 1, 18 et 8, 25, à chacun desquels couples il y a un nombre moindre que 17, et, selon votre méthode même, on se servira aussi bien de 1, 18 que de 25, 8. Car si à 25, 8, on prend 2 et la différence de 5 à 2, de même à 1, 18, on aura 3 et la différence de 1 à 3, et on aura, en l'une et l'autre sorte, les mêmes nombres 2, 3.

De même, si on donnoit 161, on auroit *quatre* couples, savoir :

1. 162 | 8. 169 | 81. 242 | 128. 289,

à chacun desquels il y a un nombre moindre que 161.

Et, pour trouver les triangles, je me sers des racines des doubles quarrés, car elles sont les racines des quarrés qui composent l'hypoténuse. Ainsi à 17, on aura 2 et 3, racines des doubles quarrés 8, 18 : mais, quand il y en a *quatre*, comme à 161, je prends les extrêmes, savoir 9, 8, et celles du milieu, 2, 11, qui donneront les triangles : 17, 144, 145, et 44, 117, 125.

1. 162	1. 9.
169. 8	13. 2
81. 242	9. 11
289. 128	17. 8

Pour avoir le côté pair du triangle, il faut prendre le double du produit des racines susdites des doubles quarrés : ainsi le double de 9 par 8 est 144, et le double de 2 par 11 est 44.

Mais pour le côté impair, on prend le produit des racines des quarrés simples : ainsi 1 par 17 donne 17, et 9 par 13 donne 117, le premier pour le triangle 17, 144, 145, le second pour 44, 117, 125.

7. Vous voyez si j'ai eu raison de dire que les nombres susdits sont la différence de *deux* couples quand ils sont premiers, et de *quatre* couples lorsqu'ils sont divisibles par deux nombres premiers. Mais ce qui le montrera encore mieux est la façon de trouver tous les couples dont un des dits nombres est la différence : car, selon ma méthode, il est nécessaire d'avoir ces deux couples qui font comme deux souches.

Exemple : *On me demande tous les quarrés et doubles quarrés dont* 7 *est la différence.* Je cherche les deux couples utiles à chacun desquels il y a un nombre moindre que 7; j'aurai 1, 8 et 9, 2. Je prends leurs racines et en fais deux colonnes séparées comme on voit ici :

Quarrés.	Doubles quarrés.	Quarrés.	Doubles quarrés.
1	2	3	1
5	3	5	4
11	8	13	9
27	19	31	22
65	46	75	53
157	111	181	128
...	...	...	...

et mets en chaque colonne les racines des quarrés d'un côté et celles des doubles quarrés de l'autre. J'ai donc d'un côté 1, 2; pour avoir les racines des couples suivans, je prends la somme de 1, 2, qui est 3, pour la racine du double quarré, et la somme des racines des deux doubles quarrés prochains pour la racine du quarré. Ainsi la somme de 1, 2 est 3, et celle de 3, 2 est 5 : j'ai donc 5 et 3. Pour le troisième couple, la somme de 5, 3 est 8, celle de 8 et 3 est 11. On poursuit ainsi autant qu'on veut, et l'autre colonne qui commence par 3, 1, se fait de même.

A chaque colonne la rangée de main droite, dont les nombres sont pairs et impairs alternativement, contient les racines des doubles quarrés, lesquels sont plus grands que les quarrés, lorsque la racine du double quarré est paire, comme 1, 2 et 11, 8; mais le double quarré est moindre quand sa racine est impaire, ce qui a lieu lorsque le moindre quarré des deux qui composent l'hypoténuse du triangle dont la dite

différence est la somme des côtés, est impair, comme à 3, 4, 5; mais c'est le rebours, quand le moindre quarré est pair, comme au triangle 5, 12, 13.

8. Je laisse le reste pour le premier voyage, auquel je vous envoierai aussi la méthode dont je me sers pour former les triangles relatifs en différence ([1]), comme 11, 60, 61 et 119, 120, 169; car je ne me sers pas des trois quarrés proportionaux.

Voici seulement ce que je vous proposerai :

1° *Trouver le moindre nombre qui soit autant de fois qu'on voudra, et non plus, la somme de deux quarrés* ([2]).

2° *Trouver un triangle auquel le double du quarré du petit côté étant ôté du quarré de la différence des deux moindres côtés, il reste un quarré.* Par exemple, si le triangle cherché étoit 7, 24, 25, il faudroit qu'ôtant 98 de 289, le reste 191 fût un quarré.

3° *Trouver un nombre qui serve d'hypoténuse à tant de triangles qu'on voudra, et non plus à chacun desquels le produit du moindre côté par l'hypoténuse soit plus grand que le quarré du moyen côté.*

4° *Trouver les bornes des proportions que les racines des quarrés constitutifs des triangles doivent avoir l'une à l'autre, afin que les triangles aient la propriété du troisième problème.*

Pour ceci, il y a autant de danger que les racines pèchent en excès qu'en défaut, mais elles ont un espace assez grand pour s'égayer, et elles ne sont pas gênées comme à l'autre limitation que vous m'avez envoyée. Si les racines sont en proportion double ou moindre, ou si elles sont en proportion triple ou plus grande, les triangles n'auront pas la dite propriété. Entre ces deux proportions, il y a un grand espace qui contient une infinité de proportions propres à ces triangles, lequel pourtant n'est pas si grand que la différence et intervalle des proportions double et triple, mais est un peu plus rétréci.

([1]) *Voir* Lettres XLVIII, 8, et XLIX, 6.

([2]) *Voir* l'Observation VII sur Diophante, t. I, p. 296.

9. Vous n'avez pas pris garde que je vous avois proposé, par ma précédente (1), de faire la même chose de l'enceinte entière du triangle, que vous demandiez de la somme des deux moindres côtés.

Je suis etc.

(1) Lettre XLIX, 10.

ANNÉE 1642.

LI.

FERMAT A MERSENNE (¹).

LUNDI 10 NOVEMBRE 1642.

(A, fᵒ 30; B, fᵒ 17 rᵒ.)

Mon Révérend Père,

1. Bien que la colère du refus de M. le Chancelier (²) me dure, je ne veux pas rester de vous obéir et chercher toutes les occasions à vous donner des preuves de mon affection et de mon service.

2. J'ai reçu ces jours passés une lettre de M. de Carcavi, par laquelle il me demande une question que M. de Roberval a résolue et à laquelle il a attaché cet éloge : *Magni quidem facienda inventio, sed maximi demonstratio geometrica, nec adeo facilis ab analysi ad synthesin regressus, ut quidam imperiti, re non satis perspecta, existimarunt.*

Cela m'a obligé d'y travailler et de l'envoyer par le précédent courrier à M. de Carcavi; mais, pource que peut-être il ne se souviendroit pas de vous en faire part et que même, en l'écrivant à la hâte, il m'a semblé que j'y ai mis quelque chose de superflu, je vous l'envoie comme elle doit être (³).

(¹) Lettre inédite.
(²) Il s'agit d'une nomination qu'attendait Fermat (*Voir* Lettre LII, 2), probablement pour sortir des chambres des enquêtes et entrer dans celle de l'édit.
(³) La pièce dont il s'agit est imprimée dans le tome I, p. 167 et suiv. La question résolue par Roberval et traitée par Fermat est la construction du cylindre de surface maxima inscrit dans une sphère donnée.

3. J'attends après cela le Livre nouveau de l'Anglois ([1]) et vous conjure de ne vous rebuter pas de quoi je ne vous ai pas envoyé mon jugement de l'autre. Vous savez mes raisons, que je vous ai déjà alléguées.

4. Vous m'obligerez de me dire pourquoi je n'ai pas eu réponse de M. de Champbon, et de baiser les mains de ma part à MM. de Mydorge et Desargues.

5. Souvenez-vous de la communication des écrits de M. Frenicle, pour l'amour duquel j'ai travaillé après les nombres, et je m'assure que je vous persuaderai quelque jour que mon travail n'a pas été inutile.

6. Je ne sais pas en quelle posture je serai dans l'esprit de M. de La Chambre depuis que la commission de Castres a si mal réussi.

Je suis, mon Révérend Père,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

Ce 10 novembre 1642.

Tournez pour le problème ([2]).

([1]) Dans la correspondance de cette époque entre Descartes et Mersenne, l'expression de « l'Anglois » désigne Hobbes, qui a donné en 1642 la première édition de son *De cive*; on y trouve également mentionné un autre auteur de la même nationalité, Thomas White (*Vitus*), qui publia, la même année, ses *De mundo dialogi tres*, où Descartes était critiqué. C'est peut-être l'ouvrage sur lequel Fermat refusait de donner son jugement.

([2]) *Voir* page précédente, note 3.

ANNÉE 1643.

LII.

FERMAT A MERSENNE (1).

MARDI 13 JANVIER 1643.

(A, f° 15-16.)

Mon Révérend Père,

1. J'envoyai par le dernier courrier mon *Isagoge ad locos ad superficiem* (2) à M. de Carcavi, de laquelle il ne manquera pas de vous faire part. Vous y trouverez des propositions aussi belles que la Géométrie en puisse produire et, bien que mon discours soit concis, il m'a semblé que je n'en devois pas dire davantage, s'agissant d'une méthode générale de laquelle les exemples et l'usage peuvent être infinis.

Je m'imagine même que cette matière n'a pas été exactement connue des anciens; car, qu'y a-t-il dit dans tous leurs Livres en fait de lieux, qui vaille la proposition suivante, par exemple?

Datis quotlibet punctis in uno vel diversis planis, invenire sphæram, in cujus superficie sumendo quodlibet punctum et ab eo ducendo rectas ad puncta omnia data, quadrata ductarum simul sumpta æquentur spatio dato (3).

Et toutefois la construction en est aisée par ma méthode, et non seulement cette proposition a été par moi découverte, mais la voie géné-

(1) Lettre inédite.
(2) Tome I, p. 111 et suiv. Cette *Isagoge* est en effet datée du 6 janvier 1643.
(3) Cp. Tome I, p. 113 : *Si a quotcumque punctis etc.*

rale pour en trouver infinies. Vous me direz votre sentiment de mon petit Traité, et celui de MM. les autres savants.

2. Cependant n'oubliez pas de m'envoyer le livre que vous m'avez promis ([1]), ni de me dire pourquoi je n'ai pas eu de réponse de M. de Champbon.

En attendant que vous preniez votre temps de parler pour moi lorsque l'occasion s'en offrira, je vous prie de savoir de M. de La Chambre qu'est-ce qui empêcha ma nomination l'année passée, et me donner avis de la réponse qu'il vous fera là dessus, afin que je sache s'il a joué de galimatias, ou s'il a eu véritablement pensée de m'obliger.

3. La proposition du *plus grand cône en superficie qui peut être inscrit en la sphère,* et que j'avois demandée à M. de Roberval par la voie de M. de Carcavi en revanche de celle du cylindre qu'il m'avoit demandée ([2]), ne m'a pas été encore envoyée. S'il me l'envoie, je vous en ferai part; mais ce n'est pas à dire que je ne sois en état de vous la faire tenir, s'il ne me relève pas de ce travail par sa construction.

4. *La proportion du cône, que le triangle équilatéral fait, à la sphère* est aisée, puisque les deux termes sont donnés en même espèce de corps, car la sphère peut se réduire en un cône par les propositions d'Archimède. Or, quand les deux termes sont donnés, vous ne doutez pas que la proportion ne soit donnée; vous n'ignorez pas la méthode de mettre toutes proportions, quoique irrationelles, en nombres entiers et approchés si près qu'on voudra. Néanmoins, si vous voulez celle-ci de moi, en tel nombre de figures de chiffre qu'il vous plaira, je vous la dresserai.

5. Vous m'obligerez de m'envoyer les épitaphes de feu M. le Cardinal que vous trouverez les meilleurs, à la réserve de celui qui finit :

Plaudente corona, Valete dixit,

que j'ai déjà vu.

([1]) *Voir* Lettre LI, 3 et 4

([2]) *Voir* Lettre LI, 2.

Je suis de tout mon cœur, mon Révérend Père,

Votre etc.,

FERMAT.

A Toulouse, ce 13 janvier 1643.

6. Je vous prie de presser M. de Carcavi pour le Pappus manuscrit, et pour les propositions que M. de Saint-Martin a de M. Frenicle (1).

LIII.

FERMAT A CARCAVI (2).

< 1643 >

(*Va*, p. 178.)

MONSIEUR,

1. Vous m'obligez toujours et je connois, dans la continuation de vos soins, celle de votre affection, de quoi je vous rends mille grâces.

Pour la Géométrie, je n'ose pas encore m'y attacher fortement depuis mon incommodité : je n'aurai pourtant pas beaucoup de peine à trouver les deux de vos propositions (3); pour celle de la parabole, je ne l'ai pas examinée, ni tentée.

2. Je remets tout ceci à ma première commodité; mais, de peur que vous ne m'accusiez de n'envoyer rien de mon invention, je vous envoie trois nombres parmi plusieurs autres que j'ai trouvés, dont les parties aliquotes font le multiple.

(1) *Voir* Lettre LIV, 3 et 4.

(2) Nous avons conservé à cette Lettre, dont la date est incertaine, le numéro qui lui a été assigné dans la Table du Tome I, page 439; mais, après nouvel examen, elle nous paraît avoir été écrite entre la Lettre LVIII du 31 mai 1643 et la Lettre LIX non datée; elle peut donc n'être pas antérieure au mois d'août 1643.

(3) Ces propositions paraissent bien différentes de celles dont il est parlé Lettre LIV, 1. Nous n'avons pu trouver d'autres renseignements ni sur les unes, ni sur les autres.

Le nombre suivant est *sous-triple* de ses parties aliquotes :

14 942 123 276 641 920.

Celui-ci est *sous-quadruple :*

1 802 582 780 370 364 661 760,

et celui-ci aussi :

87 934 476 737 668 055 040.

Puisque je me trouve sur cette matière, en voici deux que j'ai choisis parmi mes *sous-quintuples :*

Le premier se produit des nombres suivants multipliés entre eux :

8 388 608, 2801, 2401, 2197, 2187, 1331, 467, 307, 289, 241, 125, 61, 41, 31,

et l'autre se produit des nombres suivants multipliés entre eux :

134 217 728, 243, 169, 127, 125, 113, 61, 43, 31, 29, 19, 11, 7.

En voici encore un *sous-double* de ses parties, de mon invention, lequel, multiplié par 3, fait un *sous-triple :* le dit nombre est

51 001 180 160.

3. C'est parmi quantité d'autres que j'ai trouvés, que j'ai choisi par avance ceux-ci pour vous en faire part, afin que vous en puissiez juger par cet échantillon. J'ai trouvé la méthode générale pour trouver tous les possibles, de quoi je suis assuré que M. de Roberval sera étonné et le bon Père Mersenne aussi ; car il n'y a certainement quoi que ce soit dans toutes les Mathématiques plus difficile que ceci, et hors M. de Frenicle et peut-être M. Descartes, je doute que personne en connoisse le secret, qui pourtant ne le sera pas pour vous, non plus que mille autres inventions, dont je pourrai vous entretenir une autre fois.

4. Et pour exciter par mon exemple les savants du pays où vous êtes, je leur propose (¹) de *trouver autant de triangles en nombre qu'on*

(¹) *Voir* l'Observation XXIII sur Diophante. — *Cp.* Lettre LVIII, 3.

voudra de même aire, ce que Diophante ni Viète n'ont trouvé que pour trois seulement.

Je suis, etc.

LIV.

FERMAT A MERSENNE (¹).

< 27 JANVIER 1643 >

(A, f° 33; B, f° 14 v°.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Je vous rends mille grâces de votre souvenir et des propositions (²) que vous m'avez fait la faveur de m'envoyer.

Celles de la parabole, de l'hélice et du conoïde parabolique sont si visiblement fausses que ce seroit perdre le temps que de les réfuter. Néanmoins, si vous me l'ordonnez, je le ferai.

2. Je m'imagine que vous avez vu maintenant mes Lieux *ad superficiem* (³). Pourvu qu'on ne m'écrive pas qu'on les savoit auparavant que d'avoir vu mon Discours, comme on a ci-devant fait de quelques-unes de mes pièces, je serai assez satisfait; du reste, vous et ceux qui les verront, en serez les juges.

Je dois maintenant répondre aux deux questions numériques de M. de Saint-Martin (⁴).

3. La première est de *trouver trois triangles rectangles desquels les aires fassent les trois côtés d'un triangle rectangle* (⁵).

(¹) Lettre inédite, non datée, mais qui, intermédiaire entre la Lettre LII du 13 janvier et la Lettre LV du 16 février 1643, doit être du 27 janvier ou du 3 février, jours de courrier. Nous avons supposé la première de ces deux dates.

(²) Nous n'avons trouvé aucune autre indication sur ces propositions.

(³) *Voir* Lettre LII, 1.

(⁴) *Voir* Lettre LII, 6.

(⁵) *Voir* l'Observation XXIX sur Diophante, Tome I, p. 321.

Les trois triangles qu'on demande sont ceux-ci :

2405, 2397, 196. 2213, 2205, 188. 2305, 2303, 96.

S'il en veut d'autres qui satisfassent à la question, je lui en puis fournir infinis et, s'il veut ma méthode pour les trouver, je lui en ferai part. Cependant il pourra éprouver si les trois que je lui envoie satisfont à ladite question.

4. La seconde question est celle-ci (¹) : *Un nombre étant donné, déterminer combien de fois il est la différence des côtés d'un triangle qui ait un quarré pour différence de son petit côté aux deux autres côtés.* Le nombre qu'il donne est 1803601800.

Je réponds qu'en l'exemple proposé, il y a 243 triangles qui satisfont à la question, et qu'il n'y en peut pas avoir davantage.

La méthode universelle dont je lui ferai part, s'il me l'ordonne, est belle et digne de remarque, bien que je ne doute point que M. Frenicle ne lui ait baillé tout ce qui concerne ces questions.

Je ne vous envoie ces deux solutions que pour vous faire voir que les mystères numériques de M. Frenicle me doivent être communiqués aussi tôt qu'à tout autre, et que M. de Saint-Martin n'y doit pas faire difficulté.

5. Je vous prie m'envoyer au plus tôt le livre que vous m'avez promis (²), et faire en sorte que M. de Carcavi me fasse copier la réponse pour que je la puisse voir.

Je prendrai la liberté d'écrire par la première commodité à M. de Saint-Martin sur l'occasion de ces deux questions qu'il a voulu m'être proposées.

Cependant je vous prie me croire toujours, Monsieur,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

(¹) *Cp.* Lettre L, 2.
(²) *Cp.* Lettres LI, 3 et LII, 2.

6. Vous ne m'écrivez pas à quoi il a tenu que je n'aie pas eu de réponse de M. l'abbé de Champbon ([1]) depuis si longtemps, ni si vous avez parlé à M. de La Chambre, duquel je voudrois, avant que rien tenter pour moi, que vous sûssiez à quoi la chose tint l'année passée.

LV.

FERMAT A MERSENNE ([2]).

LUNDI 16 FÉVRIER 1643.

(A, f^{os} 17-18; B, f^{o} 23 v^{o}.)

Mon Révérend Père,

1. Je vous remercie de vos soins à l'endroit de M. de La Chambre, et à lui-même de ceux qu'il prit à Lyon pour moi. M. de Marmiesse, notre avocat-général, m'ayant confirmé ce que vous venez de m'écrire, lorsqu'il sera temps, je ne doute point qu'il n'ait assez de crédit pour faire tenir cette vieille promesse que M. le Chancelier a faite depuis si longtemps en ma faveur ([3]).

2. Je suis bien aise que mes solutions ([4]) aient plu à M. de Saint-Martin; elles sont purement de mon invention, et M. de Frenicle le pourra assurer que j'ai trouvé par ma méthode la solution de tout ce qu'il m'avoit proposé sur pareil sujet. Ce n'est pas qu'il ne l'eût trouvé sans doute longtemps auparavant, mais j'ai eu assez de bonheur pour découvrir par d'autres voies ou quelquefois par les mêmes ce qu'il me proposoit, et je crois que les démonstrations de toutes ces propositions pourront malaisément venir d'ailleurs que de moi, si je ne me trompe.

([1]) *Cp.* Lettres LI, 4 et 6; LII, 2.
([2]) Lettre inédite.
([3]) *Cp.* Lettres LI, 1; LII, 2; LIV, 6.
([4]) *Voir* Lettre LIV, 3 et 4.

3. Si M. de Saint-Martin est exercé aux questions des nombres, voici ce que je prends la liberté de lui proposer en revanche de ses deux questions :

Trouver deux triangles rectangles dont les aires soient en raison donnée, en sorte que les deux petits côtés du plus grand triangle diffèrent par l'unité.

Trouver deux triangles rectangles en sorte que le contenu sous le plus grand côté de l'un et sous le plus petit du même soit en raison donnée au contenu sous le plus grand et le plus petit côté de l'autre (1).

Après qu'il aura résolu ces deux questions, je lui en fournirai de plus difficiles.

4. Que s'il croyoit que les solutions des deux que je lui ai données ne soient pas de moi, il m'obligera de choisir des plus difficiles qui sont résolues dans les écrits qu'il a de M. Frenicle, et, si je n'en fais pas la solution, je consens de ne voir point le dit travail de M. Frenicle, que je désire plutôt voir pour apprendre quelles sont les questions, que pour la solution qu'il en donne. Ce n'est pas que je ne l'estime beaucoup, mais c'est que je m'imagine que je n'aurai pas beaucoup de peine à la trouver.

Si je puis trouver du loisir pour satisfaire au désir de M. de Saint-Martin sur le sujet de ma méthode *de maximis et minimis* et sur celle dont je me sers à la résolution de ses questions numériques, je serai ravi de lui plaire et à vous qui me l'ordonnez.

5. Pour les lignes courbes auxquelles vous m'écrivez que M. de Roberval a trouvé d'autres lignes égales, sur lequel sujet vous m'alléguez l'hélice (2), j'appréhende qu'il y aura de l'équivoque. Il semble d'abord, par la raison des inscrites et circonscrites, que l'hélice

(1) *Voir* l'Observation XXX sur Diophante.

(2) Ce passage donne une date pour la découverte par Roberval de l'égalité entre la longueur des arcs de la spirale d'Archimède et ceux d'une parabole, égalité démontrée plus tard par Pascal. *Voir* Tome I, p. 206, note 1.

d'Archimède est la moitié de la circonférence du cercle qui sert à la décrire, et c'étoit une pensée que j'avois eue il y a fort longtemps, mais je me détrompai d'abord. Si c'est celle de M. de Roberval, je m'assure qu'il ne sera pas longtemps de même avis, et qu'il n'aura besoin que d'une seconde réflexion pour se dédire.

Je suis en peine de savoir des nouvelles de M. de Carcavi; vous m'obligerez de m'en donner et de me croire, mon Révérend Père,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 16 février 1643.

LVI.

FERMAT A MERSENNE (1).

MARDI 7 AVRIL 1643.

(A, f°s 19-20; B, f° 22 v°.)

MONSIEUR MON REVEREND PÈRE,

1. Vous n'eûtes pas de mes lettres par le dernier courrier, à cause d'une petite absence qui m'a tenu huit jours à la campagne pendant la fête. Vous aurez maintenant la réponse que je fais à M. de Brulart (2) jointe à celle-ci; je l'ai écrite à la hâte, comme vous verrez, et c'est la raison qui m'oblige à vous prier qu'il n'en soit pas fait de copie et qu'elle ne sorte pas d'entre les mains de M. de Brulart.

(1) Lettre inédite.

(2) Le personnage désigné dans les Lettres LIV et LV sous le nom de Saint-Martin s'appelait Pierre Bruslart de Saint-Martin et était collègue de Carcavi au Grand-Conseil. Il semble qu'ici il s'agit encore de lui (Cp. LV, 4).

La réponse dont parle Fermat est perdue; on voit qu'elle concernait sa méthode *de maximis et minimis*.

Ce n'est pas que ce que j'y ai mis ne puisse être expliqué assez aisément, mais il y a quelque petit équivoque où on me pourroit accuser de négligence, comme lorsque j'ai dit que les deux derniers termes de l'équation qui se trouvent mesurés par E sont en plus grande raison qu'aucuns autres qui leur soient relatifs dans les plus hautes puissances. On pourrait dire qu'à le prendre *convertendo*, ils sont en moindre raison qu'aucuns autres de leurs relatifs; mais c'est en ma règle et en mon raisonnement toute la même chose, et les mêmes conséquences se déduisent de l'un et de l'autre.

Il y pourroit encore avoir équivoque en ce que j'ai dit : que non seulement A — E doit donner la même équation que A + E, mais encore que, si A + E donne moins que A, A — E doit aussi donner moins que A. Car il semble d'abord que, si A — E donne la même équation que A + E, qu'il est infaillible que, l'un donnant moins que A, l'autre donnera de même moins que A; ce qui pourtant n'est pas et qu'il me semble avoir suffisamment expliqué par l'exemple que j'ai ajouté.

Mais, pour ôter tout équivoque, lorsque j'ai dit que A — E doit donner la même équation que A + E, j'entends que par la position de A — E, en suivant ma méthode, on doit trouver A égal à une même quantité que si nous employons A + E par la même méthode. Mais, lorsque j'ai ajouté, en la seconde condition, que si A + E donne moins que A, A — E doit de même donner moins que A, j'entends que si, par la position de A + E, les homogènes qui représentent le plus grand sont moindres que les homogènes qui représentent le plus grand en la position de A seul, de même, en la position de A — E, les homogènes qui représentent le plus grand doivent être moindres que les homogènes qui représentent le plus grand en la position de A seul.

Voilà ce que j'ai cru vous devoir dire sur ce sujet. Car pour rendre la chose entièrement claire et parfaitement démontrée, il faudroit un Traité entier, que je ne refuirai pas de faire, dès que je pourrai trouver du loisir assez pour cela.

2. J'attends la solution de quelques-unes de mes questions numériques [1], et vous prie de m'apprendre quand est-ce que M. Frenicle sera de retour à Paris, et si M. de Sainte-Croix est en état de soudre des questions.

3. Pour les parties aliquotes, j'ai découvert des choses excellentes et je puis vous envoyer quelques multiples de mon invention autres que ceux que vous avez mis dans la préface du petit Livre *Des Pensées de Galilée* [2], et pour ne vous laisser plus en doute que je ne possède la voie infaillible de ces questions, j'ai relu ces jours passés une question que vous me faisiez par ordre de M. Frenicle, dont je vous envoie présentement la solution.

4. Vous me demandiez donc quelle proportion a le nombre, qui se produit des nombres suivants, avec ses parties aliquotes :

214 748 364 800 000, 11, 19, 43, 61, 83, 169, 223, 331, 379, 601, 757, 961,
1201, 7019, 823 543, 616 318 177, 6561, 100 895 598 169.

Vous me demandiez ensuite si ce dernier nombre est premier ou non, et une méthode pour découvrir dans l'espace d'un jour s'il est premier ou composé.

A la première question, je vous réponds que le nombre qui se fait de tous les nombres précédents multipliés entre eux, est sous-quintuple de ses parties.

(1) *Voir* Lettre LV, 3.

(2) Les nouvelles pensées de Galilée, mathematicien et ingenieur du duc de Florence, où il est traité de la proportion des mouvements naturels et violents et de tout ce qu'il y a de plus subtil dans les Mechaniques et dans la Physique. Où l'on verra d'admirables inventions et demonstrations inconnues jusqu'à present. Traduit d'Italien en François. — A Paris, chez Henry Guenon, rue Saint-Iacques, à l'Image de S. Bernard, pres des Iacobins, M.DC.XXXIX. Avec Privilege du Roy.

Dans la préface de ce volume, Mersenne ne donne d'après Fermat que les nombres déjà insérés dans celle de l'*Harmonie universelle* de 1636 (*voir* Pièce IV$_A$). Il en a ajouté divers autres dus à Sainte-Croix, Descartes (*un excellent Geometre*), Frenicle (*un excellent esprit*), au reste sans aucune désignation par nom propre.

A la seconde question, je vous réponds que le dernier de ces nombres est composé et se fait du produit de ces deux :

898 423 et 112 303,

qui sont premiers ([1]).

Je suis toujours, mon Révérend Père,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 7 avril 1643.

LVII.

FRAGMENT D'UNE LETTRE DE FERMAT ([2]).

< 1643 >

(A, f° 74.)

Tout nombre impair non quarré est différent d'un quarré par un quarré, ou est la différence de deux quarrés, autant de fois qu'il est

([1]) Sur le problème ainsi posé, il était aisé de trouver la composition du dernier nombre. En effet, si, pour trouver le rapport du produit à la somme des parties aliquotes, on part du premier nombre qui est $2^{36} \times 5^{8}$, on remarque que 2^{36} a, pour somme de ses parties aliquotes, $223 \times 616\,318\,177$. Le second de ces deux facteurs correspond de même à la somme $2 \times 7^{3} \times 898\,423$. Ce dernier facteur ne se retrouvant pas, comme les précédents, parmi ceux du produit proposé, il est naturel d'essayer de diviser par lui le dernier nombre donné, dès que l'on ignore si celui-ci est premier. Par conséquent, quelque méthode que possédât Fermat pour rechercher si un nombre est premier ou non (*voir* Pièce LVII), il est improbable qu'il ait employé cette méthode et fait des calculs plus longs que ceux que nous avons indiqués.

([2]) Le fragment qui suit a été publié par M. Charles Henry (*Recherches etc.*, p. 191) d'après le brouillon d'Arbogast, transcrit d'une copie perdue de Mersenne. Il ne renferme que l'exposé d'une méthode pour la recherche des diviseurs d'un nombre, en commençant par les plus grands, et répond ainsi à une question faite par Mersenne pour le compte de Frenicle (*Cp.* LVI, 4) et sur laquelle les correspondants de Fermat ont dû revenir. Mais la copie d'Arbogast porte le titre : *Des nombres des parties aliquotes,* qui semble indiquer que ce fragment faisait partie d'une communication beaucoup plus étendue, adressée soit à Mersenne, soit à Frenicle. Dans ce cas, la date en serait probablement postérieure à celle que suppose le rang assigné à cette pièce pour la rapprocher de la Lettre LVI.

composé de deux nombres, et, si les quarrés sont premiers entre eux, les nombres compositeurs le sont aussi. Mais si les quarrés ont entre eux un commun diviseur, le nombre en question sera aussi divisible par le même commun diviseur, et les nombres compositeurs seront divisibles par le côté de ce commun diviseur.

Par exemple : 45 est composé de 5 et de 9, de 3 et de 15, de 1 et de 45. Partant, il sera trois fois la différence de deux quarrés : savoir de 4 et de 49, qui sont premiers entre eux, comme aussi sont les compositeurs correspondants 5 et 9; plus, de 36 et de 81, qui ont 9 pour commun diviseur, et les compositeurs correspondants, 3 et 15, ont le côté de 9, savoir 3, pour commun diviseur; enfin 45 est la différence de 484 et 529, qui ont 1 et 45 pour compositeurs correspondants.

Il est fort aisé de trouver les quarrés satisfaisants, quand on a le nombre et ses parties, et d'avoir les parties lorsqu'on a les quarrés.

Cette proposition se trouve quasi tout par tout. On en pourrait quasi autant dire des pairements pairs, excepté 4, avec quelque petite modification.

Cela posé, qu'un nombre me soit donné, par exemple 2 027 651 281, on demande s'il est premier ou composé, et de quels nombres il est composé, au cas qu'il le soit.

J'extrais la racine, pour connoître le moindre des dits nombres, et trouve 45 029 avec 40 440 de reste, lequel j'ôte du double plus 1 de la racine trouvée, savoir de 90 059 : reste 49 619, lequel n'est pas quarré, parce que aucun quarré ne finit par 19, et partant je lui ajoute 90 061, savoir 2 plus que 90 059 qui est le double plus 1 de la racine 45 029. Et parce que la somme 139 680 n'est pas encore quarrée, comme on le voit par les finales, je lui ajoute encore le même nombre augmenté de 2, savoir 90 063, et je continue ainsi d'ajouter tant que la somme soit un quarré, comme on peut voir ici (1). Ce qui n'arrive qu'à 1 040 400, qui est quarré de 1020, et partant le nombre donné est composé : car il est aisé, par l'inspection des dites sommes, de voir qu'il n'y a au-

(1) Fermat avait dû effectuer en marge les calculs indiqués, qui n'ont pas été reproduits sur la copie.

cune qui soit nombre quarré que la dernière, car les quarrés ne peuvent souffrir les finales qu'elles ont, si ce n'est 499 944 qui néanmoins n'est pas quarré.

Pour savoir maintenant les nombres qui composent 2 027 651 281, j'ôte le nombre que j'ai premièrement ajouté, savoir 90 061, du dernier ajouté 90 081. Il reste 20, à la moitié duquel plus 2, savoir à 12, j'ajoute la racine premièrement trouvée 45 029. La somme est 45 041, auquel nombre ajoutant et ôtant 1020, racine de la dernière somme 1 040 400, on aura 46 061 et 44 021, qui sont les deux nombres plus prochains qui composent 2 027 651 281. Ce sont aussi les seuls, pource que l'un et l'autre sont premiers.

Si l'on alloit par la voie ordinaire, pour trouver la composition d'un tel nombre, au lieu de onze additions, il eût fallu diviser par tous les nombres depuis 7 jusqu'à 44 021.

Plusieurs abrégés se peuvent trouver, comme lorsqu'on ne fait qu'une addition au lieu de dix, aux endroits où les sommes ont leurs finales quarrées, quand les compositeurs sont beaucoup éloignés l'un de l'autre.

LVIII.

FERMAT A < SAINT-MARTIN > (1).

DIMANCHE 31 MAI 1643.

(B, f° 9 v°.)

1. *Donner le sixième triangle qui a l'unité pour différence de ses deux petits côtés.*

(1) Fragment inédit d'une lettre perdue. Il porte comme titre, dans le manuscrit : « *Extraict d'une lre du* 31 *may* 1643 *à M. DF.* », ce qui indiquerait Frenicle comme le destinataire. Mais, si l'on compare la Lettre L de Frenicle à Fermat, il est très improbable que le premier ait proposé au second deux questions dont il lui avait auparavant donné une solution. Il est établi d'autre part, par les lettres suivantes (LIX et LX), que les questions énoncées par Fermat dans la présente (3) étaient proposées à S^{t}-Martin et à Frenicle. Le destinataire effectif fut donc plutôt S^{t}-Martin et la confusion s'explique d'ailleurs facilement.

Donner le second triangle qui a pour différence de ses deux petits côtés 7.

Pour la première question, le premier triangle qui a pour différence de ses deux côtés l'unité, lequel est : 3, 4, 5, donne aisément tous les autres par ordre, et voici comme je procède :

Du double de la somme de tous les trois côtés, ôtez-en séparément les deux petits côtés, et ajoutez-y le plus grand côté, vous aurez le second triangle, lequel par la même règle donnera le troisième, celui-là le quatrième, etc. à l'infini.

Pour avoir donc le second, prenez le double de la somme des trois côtés du premier, qui est 24; ôtez-en séparément les deux petits côtés, restera 20 et 21, et ajoutez à 24 le grand côté, viendra 29. Nous aurons donc pour le second triangle : 20, 21, 29; le troisième sera : 119, 120, 169, et le sixième : 23660, 23661, 33461.

2. La seconde question a la pareille solution : il y a deux triangles fondamentaux qui ont 7 pour différence de leurs petits côtés, savoir 5, 12, 13, et 8, 15, 17. De chacun de ceux-là se forment tous les autres à l'infini par la méthode précédente.

Par exemple, le double de 5, 12, 13 est 60; ôtez-en séparément les deux petits côtés, 5 et 12, restera 48 et 55; ajoutez à 60 le plus grand côté, viendra 73. Donc nous aurons pour le premier triangle : 48, 55, 73.

De même 8, 15, 17 donnera 65, 72, 97. Etc. à l'infini.

Je sais bien qu'on pourroit réduire ces questions à trouver combien de fois et l'unité et 7 sont la différence d'un quarré et d'un double quarré; mais il faudroit en ce cas deux opérations, et il me semble plus commode d'en user d'une seule.

3. Je vous propose (¹) :

1° *Trouver un triangle rectangle duquel le plus grand côté soit un quarré et la somme des deux ou trois autres soit quarrée.*

(¹) *Voir* pour ces questions : 1° l'Observation XLIV sur Diophante; 2° l'Observation XXIII; 3° les Lettres LIX, 2, et LX, 2.

2° *Trouver quatre triangles de même aire.*

3° *Un triangle duquel l'aire, ajoutée au quarré de la somme des deux petits côtés, fasse un quarré.*

LIX.

FERMAT A MERSENNE (¹).

< AOUT 1643 >

(A, f^{os} 37-38; B, f^{o} 22bis r°.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. Vous m'écrivez que la proposition de mes questions impossibles (²) a fâché et refroidi MM. de Saint-Martin et Frenicle, et que ç'a été le sujet qui m'a rompu leur communication. J'ai pourtant à leur représenter que tout ce qui paroît impossible d'abord ne l'est pas pourtant, et qu'il y a beaucoup de problèmes desquels, comme a dit autrefois Archimède, οὐκ εὐμέθοδα τῷ πρώτῳ φανέντα χρόνῳ τὴν ἐξεργασίαν λαμβάνοντι (³).

Vous vous étonnerez bien davantage si je vous dis de plus que toutes les questions que je leur ai proposées sont possibles, et que j'ai découvert leur solution. Ce n'est pas qu'elles ne soient très malaisées et que, pour les soudre, il ne faille faire quelque démarche au delà du Diophante et des Anciens et Modernes. Mais, comme toutes les inventions n'arrivent pas et ne se produisent pas en même temps, celle-ci est du nombre de celles dont la méthode n'est pas dans les Livres et que je puis attribuer au bonheur de ma recherche.

2. Et, afin que je ne vous tienne pas plus longuement en suspens,

(¹) Lettre inédite, dont la date approximative est indiquée par celle de la suivante.

(²) Les questions de la Lettre LVIII, 3.

(³) Préambule du Traité *De lineis spiralibus*. Fermat a cité de mémoire; dans le texte d'Archimède, au lieu de τῷ πρώτῳ, on lit ἐν ἀρχᾷ.

j'ai résolu toutes les questions que j'ai proposées à ces Messieurs, dont je ne vous coterai maintenant qu'un exemple, pour leur ôter seulement la mauvaise impression qu'ils avoient conçue contre moi, comme leur ayant proposé un amusement et un travail inutile. Je choisirai pour mon exemple une des plus belles propositions que je leur ai faites (1) :

Trouver un triangle duquel le plus grand côté soit quarré, et la somme des deux autres soit aussi quarrée.

Voici le triangle :

4 687 298 610 289, 4 565 486 027 761, 1 061 652 293 520.

3. S'ils veulent la solution de quelqu'une des autres questions, je la leur envoierai dès qu'ils voudront; ils n'ont qu'à me marquer celle ou celles qu'ils désirent.

Il faut proposer les autres à soudre à ceux qui disent (comme M. de Carcavi m'a écrit) que j'ai trouvé ma méthode *de maxima et minima* par hazard. Car peut-être ne croiront-ils pas que j'aie trouvé ces questions à tâtons et par rencontre. M. Hardy est un de ceux-là.

Vous m'obligerez de saluer M. de Saint-Martin de ma part. Peut-être que, pour l'amour de lui, je mettrai par écrit mes inventions sur Diophante, où j'ai découvert plus que je ne m'étois jamais promis. La méthode pour soudre les questions que je lui ai proposées est un échantillon de mon travail.

Je serai bien aise que M. de Frenicle souffre le renouement de notre commerce.

4. M. de Carcavi vous fera part de quelques nombres sous-multiples que je lui ai envoyés (2).

J'en ai trouvé quantité d'autres et la méthode générale pour trouver tous les possibles.

5. N'oubliez pas de presser M. de La Chambre (3) et de le faire agir

(1) *Comparer* l'Observation XLIV sur Diophante.
(2) *Voir* Lettre LIII, 2.
(3) *Cp.* Lettres LI, 1 et 6; LII, 2; LIV, 6.

de la bonne façon. S'il me considère, comme il fait semblant, cette petite affaire vaut faite.

Je suis, mon Révérend Père, votre etc.

FERMAT.

6. Le théorème que vous m'avez proposé de la part du géomètre de Châlons (¹), marque qu'il n'a pas fait grand progrès en l'Algèbre, car les plus médiocres ne peuvent pas douter que ce théorème ne soit généralement vrai.

Si MM. de Saint-Martin et de Frenicle veulent renouer le commerce des lettres, nous vous ferons voir des choses nouvelles et qu'il ne faut pas chercher dans les Livres.

Si M. de La Chambre n'agit pas bientôt et avec affection, je songerai à ne l'employer plus.

LX.

FERMAT A MERSENNE (²).

MARDI 1er SEPTEMBRE 1643.

(A, f° 31; B, f° 22 ter.)

MON RÉVÉREND PÈRE,

1. J'ai vu, par la lettre de M. de Saint-Martin, que mes questions lui ont paru impossibles (³) et à M. Frenicle aussi.

C'est une marque infaillible de la difficulté qu'ils y ont trouvée; pourtant, non seulement elles sont toutes faisables, mais j'en ai découvert la solution et, afin qu'ils n'en doutent pas, j'ajouterai à la solution

(¹) Nous n'avons trouvé aucune indication sur ce géomètre, ni sur son problème.

(²) Lettre inédite.

(³) *Voir* Lettres LVIII, 3, et LIX, 1.

de la question que je vous envoyai dernièrement ([1]), qui étoit :

Trouver un triangle dont le plus grand côté soit quarré, et la somme des deux autres soit aussi quarrée,

celle de la suivante, qu'ils ont tout de même jugée impossible :

2. *Trouver un triangle duquel l'aire ajoutée au quarré de la somme des deux petits côtés fasse un quarré.*

Voici le triangle :

205769, 190281, 78320.

3. La troisième étoit :

Trouver quatre triangles de même aire.

Mais, pource que M. de Saint-Martin m'écrit qu'il espère de venir à bout de celle-là, je ne vous donnerai point la solution présentement, seulement vous dirai-je qu'après qu'il en aura trouvé quatre, je lui en ferai voir cinq et, s'il m'invite, une méthode générale pour trouver autant de triangles qu'on voudra de même aire; ce qui vous fera peut-être étonner de ce que Diophante et Viète ([2]) n'ont proposé ni fait la question qu'en trois seulement.

Si M. de Saint-Martin ne m'écrivoit qu'il est allé faire un voyage, je lui récrirois sans remise. Vous m'obligerez de m'apprendre quand il sera de retour, afin que je satisfasse à mon devoir, et cependant je vous prierai de lui faire voir cette lettre avec ma précédente ([3]), afin qu'il connoisse que je ne lui ai rien proposé dont je ne sois venu à bout.

Je serai bien aise que M. Frenicle voie ces miennes solutions, de quoi je me confie à vous et suis toujours, mon Révérend Père, votre etc.

FERMAT.

A Toulouse, 1 septembre 1643.

4. Je n'ai pas bien compris le théorème de Torricelli en votre

([1]) *Voir* Lettre LIX, 2.
([2]) Diophante, *Arithmétiques*, V, 8; Viète, *Zetetic.*, IV, 11.
([3]) La Lettre LIX.

Lettre [1]; vous m'obligerez de l'étendre un peu plus et de faire bien la figure.

[1] Torricelli avait communiqué en 1643 au P. Niceron un certain nombre de propositions qu'il fit imprimer l'année suivante dans ses *Opera geometrica*. La plus remarquable concernait le volume de révolution engendré par une hyperbole équilatère tournant autour de son asymptote; Torricelli énonçait que ce volume, à partir d'une ordonnée déterminée, est fini. Dans une lettre adressée par Mersenne à Torricelli le 25 décembre 1643 (*Discepoli di Galileo*, t° XLI, f° 9 r°), et publiée dans le *Bullettino Boncompagni*, VIII, p. 420, on lit :

« Clarissimus geometra Senator Tholosanus Fermatius tibi per me sequens problema solvendum proponit, quod tuo de conoide acuto infinito æquivaleat :

» Invenire triangulum rectangulum in numeris, cujus latus majus sit quadratum, summaque duorum aliorum etiam sit quadratum, denique summa majoris et medii lateris sit etiam quadratum.

» Exempli gratia : in triangulo 3, 4, 5, oportet 5 esse numerum quadratum; deinde summa 4 et 3, hoc est 7, foret numerus quadratus; denique summa 5 et 4, hoc est 9, esset quadrata.... »

ANNÉE 1644.

LXI.

FERMAT A CARCAVI (1).

< 1644 >

(*Va.* p. 178-179.)

MONSIEUR,

1. Je suis marri de la perte du paquet de M. de Saint-Martin. Je lui écrivois sur le sujet des nombres et lui faisois part de quelques propositions et surtout de la suivante, que M. Frenicle m'avoit autrefois proposée (2) et qu'il m'avoua tout net ne savoir point :

Trouver un triangle rectangle, auquel le quarré de la différence des deux moindres côtés surpasse le double du quarré du plus petit côté d'un nombre quarré.

Je lui avouai aussi pour lors que je n'en savois point la solution et que je ne voyois pas même de voie pour y venir, mais depuis je l'ai trouvée avec autres infinies. Voici le triangle (3) :

156, 1517, 1525.

Il sert à la suivante question, pour laquelle M. Frenicle se mettoit en peine de ce préalable :

Trouver un triangle rectangle, duquel le plus grand côté soit quarré et le plus petit diffère d'un quarré de chacun des deux autres.

(1) La date de cette Lettre est présumée d'après celle de l'édition de Théon de Smyrne, donnée par Boulliau.

(2) *Voir* Lettre L, 8. — On peut constater la perte de deux Lettres échangées entre Fermat et Frenicle à la suite de cette Lettre L.

(3) *Cp.* l'Observation XLIV sur Diophante.

Si vous jugez à propos de faire part de cette proposition à mon dit Sieur de Saint-Martin, je m'en remets à vous; je ne resterai pas de lui récrire par la première voie.

2. J'ai donné à Monsieur l'Archevêque ([1]) un petit mémoire de corrections sur le *Theon Smyrnæus*, que je crois qu'il envoiera à l'auteur avec le manuscrit de l'Astronomie ([2]). Je serai ravi que cette occasion me serve à être connu de M. Boulliau, de qui le mérite, étant connu à tout le monde, m'a été pleinement confirmé par ce nouveau travail sur le Théon, où j'ai particulièrement admiré la correction du décret de Timothée, qui ne pouvoit être due qu'à une main de cette importance.

Je suis etc.

([1]) Charles de Montchal, archevêque de Toulouse. — Pour les corrections proposées par Fermat au texte édité par Boulliau, *voir* Tome I, Appendice, VIII, pages 373-376.

([2]) Dans les prolégomènes de son *Astronomia philolaïca* (1645), p. 20, Boulliau dit en effet avoir entre les mains ce manuscrit de la seconde partie de l'ouvrage de Théon, que Montchal avait mis à sa disposition; mais il ne le publia pas. Ce manuscrit, entré vers 1700 à la Bibliothèque Royale (fonds grec n° 1821), ne fut utilisé qu'en 1849 par Th.-H. Martin : *Theonis Smyrnæi Platonici liber de Astronomia*.

ANNÉE 1646.

LXII.

FERMAT A GASSENDI [1].

< 1646? >

(*Va*, p. 201-204.)

1. Pronuntiavit Galileus motum uniformiter acceleratum esse eum

(1) Cette pièce a été imprimée en premier lieu dans l'édition de Lyon (1658) des Œuvres de Gassendi, t. VI, pp. 541-543, ainsi que le mentionne au reste la note suivante des *Varia* :

« Hæc epistola Typis edita fuit tomo 6 Operum Gassendi inter epistolas ad eum scriptas. »

Elle porte comme intitulé dans les *Varia* :

« Viro Clarissimo Dom. Gassendo Petrus de Fermat S. P. — De proportione quâ gravia decidentia accelerantur. »

Elle est suivie dans les *Varia*, p. 204, de la pièce suivante :

« *Lettre de Monsieur Gassendi à Monsieur de*****

» Monsieur,

» Il y a déjà quelque temps que Monsieur le Président de Donneville, s'étant donné la » peine de me venir voir, me laissa un écrit de Monsieur de Fermat touchant l'accroisse- » ment de vitesse qui est en la cheute des corps, et parce que je n'ay point eu l'honneur » de le revoir depuis, et que je ne sçay point son logis pour le luy pouvoir rendre, et que » d'ailleurs il me semble qu'il me dit en passant qu'il avoit charge de vous le remettre » après qu'il me l'auroit monstré, je me suis advisé de vous l'envoyer sans plus attendre. » avec les tres humbles remerciemens que je dois à mondit sieur de Fermat de la bonté » qu'il a eüe de m'en donner la communication. Il seroit superflu de vous dire combien

qui, a quiete recedens, temporibus æqualibus æqualia celeritatis momenta sibi superaddit ([1]).

Eum vero qui æqualibus spatiis æqualia celeritatis momenta sibi superaddit, adeo non convenire motui gravium descendentium affirmat ut, ex eo supposito, motum in instanti fieri deducat et, ut sibi persuasit, facillime demonstret.

Sed concedatur, si placet, viro perspicaci et Lyncæo indemonstrata conclusio, dummodo sit vera. Demonstrationem enim dum primo statim obtutu

Aut videt, aut vidisse putat per nubila ([2]),

nihil mirum si lectoribus minus utique Lyncæis parum videatur satisfecisse.

Ut igitur constet suus honor Galileo, neque amplius de ipsius illatione ambigatur, aut rationibus tantum probabilibus disputetur, propositionem ipsam more Archimedeo hic demonstratam habebis.

2. *Si quotlibet rectæ, ad unum punctum concurrentes, exponantur in continua proportione, earum intervalla erunt in eadem ratione.*

» j'en suis satisfait, puisque comme vous sçavés mieux que tout autre rien ne peut partir » d'une telle main qui ne soit parfait en tout point. Je suis, etc. »

D'autre part, les *Varia* (page VI non numérotée) reproduisent la mention honorifique suivante :

« *Samuel Sorberius in præfatione Operum Gassendi.*

» Petrum Fermatium tam longo intervallo Vietam, Diophantum et Pythagoreos omnes » post se relinquentem. »

Cette mention se trouve effectivement page 36 (non numérotée) de la Notice de Sorbière.

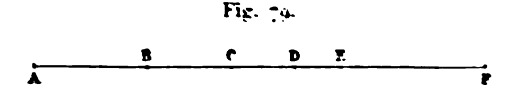
La présente lettre n'est pas datée; mais on peut la rapporter vraisemblablement à l'année 1646; c'est la date de l'ouvrage in-4 de Gassendi : *De proportione qua gravia decidentia accelerantur Epistolæ III quibus respondetur ad epistolas Petri Cazræi* (*Œuvres*, tome III, p. 564). Fermat fera allusion dans les nos LXXXII et LXXXIII à la même question.

([1]) C'est la définition qu'on trouve commentée dans la *Giornata terza* des *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove Scienze attenenti alla meccanica et movimenti locali*. Leyde, 1638, 4°, p. 158. (Cf. *Opere di Galileo Galilei*, éd. Albèri, tome XIII, p. 155.)

([2]) Virgile, Énéide, VI, 454.

Verbi gratia, sint rectæ (*fig.* 79) AF, BF, CF, DF, EF, etc. in conti-

Fig. 79.



nua proportione, erunt intervalla ipsarum, AB, BC, CD, DE, in eadem ratione.

Est enim

ut tota AF ad totam BF,

ita ablata BF a priore ad CF ablatam a posteriore.

Ergo

ita reliqua AB ad reliquam BC ut tota ad totam, hoc est, ut AF ad BF,

et sic de cæteris.

Eadem ratione demonstrabimus

ut AF ad CF, ita esse AB ad CD,

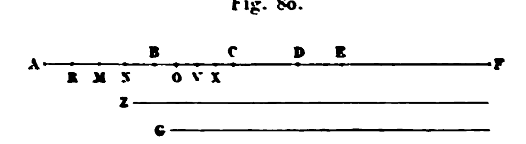
et

ut BF ad DF, ita esse BC ad DE,

etc.

3. *Si intelligatur motus a puncto* F (fig. 80) *versus punctum* A *continue acceleratus secundum rationem decursorum spatiorum, et expo-*

Fig. 80.



nantur quotlibet continue proportionales ut AF, BF, <CF, DF, >EF, etc., *tempus in quo mobile percurret spatium* DE *erit æquale tempori in quo idem mobile percurret spatium* DC; *denique spatia omnia* ED, DC, CB *eodem tempore singula percurrentur.*

4. Demonstrabimus *primo* spatia CB, BA eodem tempore in supposito motu percurri.

Si enim tempus per AB non est æquale tempori per BC, erit vel majus vel minus.

Sit primum majus, si fieri potest. Ergo

tempus per AB est ad tempus per BC
ut aliqua recta major ipsâ BF ad ipsam BF.

Sit recta illa Z : ergo est

ut tempus per AB ad tempus per BC, ita recta Z ad rectam BF.

Sumantur inter rectas AF, BF, tot mediæ in continua proportione, ut RF, MF, NF, donec minor ex ipsis, ut NF, sit minor quam recta Z : quod quidem necessario eventurum, vel ex sola mediæ inventione ejusque iterata, quoties opus fuerit, operatione, quis non videt?

Erunt ergo continuæ proportionales rectæ AF, RF, MF, NF, BF; cùm autem sit

ut AF ad BF, ita BF ad CF, et ita AB ad BC,

ergo poterit continuari proportio sub eodem numero terminorum, ut sint etiam proportionales BF, OF, VF, XF, CF, idque in eadem superiorum ratione.

His ita positis et constructis, considerentur et comparentur singula spatia AR, RM, MN, NB singulis spatiis BO, OV, VX, XC, singula nempe singulis, hoc est, spatium AR spatio BO.

Si igitur per spatium AR fuerit motus uniformis juxta gradum velocitatis in puncto R acquisitum, < et per spatium BO motus uniformis juxta gradum velocitatis in puncto B acquisitum >,

tempus per AR ad tempus per BO componeretur
ex ratione spatii AR ad spatium BO
et (vicissim) ex ratione velocitatis per B ad velocitatem per R :

quod notissimum est et Galileus ipse demonstravit, propositione quintâ *Tractatus de motu æquabili* (1).

At

ut spatium AR ad spatium BO, ita,

(1) « Si duo mobilia æquabili motu ferantur, sint tamen velocitates inæquales et inæqualia spatia peracta, ratio temporum composita erit ex ratione spatiorum, et ex ratione velocitatum contrarie sumptarum. » (*Discorsi e dimostrazioni matematiche*. Leyde, 1638, p. 154; *Opere di Galileo Galilei*, éd. Albèri, t. XIII, p. 152.)

per primam propositionem,

recta AF ad rectam BF,

et

ut velocitas per B ad velocitatem per R, ita,

ex supposita motûs accelerati juxta spatia decursa definitione,

recta BF ad rectam RF;

ergo tempus per AR, hoc casu, ad tempus per BO componeretur

ex ratione AF ad BF et ex ratione BF ad RF;

esset igitur

tempus per AR ad tempus per BO ut recta AF ad rectam RF.

Deinde, si per spatium RM fieret motus uniformis juxta gradum velocitatis < in puncto M acquisitum, et per spatium OV motus uniformis juxta gradum velocitatis > in < puncto > O acquisitum, eâdem ratione probabitur

tempus per MR ad tempus per OV esse ut recta RF ad rectam MF.

Similiter, considerando velocitates punctorum N et V, erit

tempus per MN ad tempus per VX ut MF ad NF.

Denique, considerando velocitates punctorum B et X in ultimis spatiis, erit

tempus per NB ad tempus per XC ut NF ad BF.

Sed omnes ejusmodi rationes, nempe AF ad RF, RF ad MF, MF ad NF, NF ad BF, ex constructione sunt eædem : ergo

tempus omnium motuum per totam AB
ad tempus omnium motuum per totam BC

in utrisque spatiis ita ut diximus consideratorum

est ut recta AF ad RF, sive NF ad BF.

Sed tempus motûs accelerati per AR est minus tempore motûs per AR uniformis juxta velocitatem in R : cùm enim a puncto R usque ad punctum A perpetuo, ex hypothesi, velocitas crescat, ergo a puncto R ad punctum A citius per motum acceleratum pervenitur quàm si velo-

citas acquisita in R eadem et uniformis usque ad punctum A perseveraret.

Eadem ratione probabitur tempus motûs accelerati per RM esse minus tempore motûs uniformis per RM, si velocitas ipsius ultimo ipsius spatii M puncto respondeat.

Denique constat motum per totam AB acceleratum, ut fiet hypothesis, minori tempore fieri quàm motum alium fictitium ex motibus uniformibus, juxta velocitates ultimis spatiorum AR, RM, MN, NB punctis respondentes, compositum.

At contra tempus motûs accelerati per BO est majus tempore motûs uniformis per BO, considerati juxta velocitatem puncti B, quia velocitas a puncto B ad O semper crescit in motu accelerato, juxta hypothesin, et minor semper est velocitate quæ respondet puncto B.

Unde pari ratiocinio concludetur motum per totam BC acceleratum, ut fiet hypothesis, majori tempore fieri quàm motum illum fictitium ex motibus uniformibus, juxta velocitates primis spatiorum BO, OV, VX, XC punctis respondentes, compositum.

Cùm ergo tempus motûs accelerati per AB sit minus tempore motûs illius fictitii per eamdem AB, et contra tempus motûs accelerati per BC sit majus tempore motûs illius fictitii per eamdem BC, ergo

minor est ratio temporis motûs accelerati per AB
ad tempus motûs accelerati per BC
quàm temporis motûs fictitii per AB
ad tempus motûs fictitii per BC;

sed,

ut tempus motûs accelerati per AB ad tempus motûs accelerati per BC,
ita posuimus esse rectam Z ad rectam BF,

et

ut tempus motûs fictitii per AB ad tempus motûs fictitii per BC,
ita demonstravimus esse NF ad BF :

ergo

minor est ratio rectæ Z ad rectam BF quàm rectæ NF ad eamdem BF,

quod est absurdum, cùm recta Z sit major rectâ NF.

Ergo tempus motûs accelerati per AB non est majus tempore motûs accelerati per BC.

Eàdem facilitate probabimus tempus motûs per AB accelerati non esse minus tempore motûs accelerati per BC.

Sit enim minus, si fieri potest : erit igitur

ut tempus motûs per AB accelerati ad tempus motûs accelerati per BC, ita recta minor ipsâ BF ad ipsam BF.

Esto itaque recta illa, minor quàm BF, G et sit

tempus motûs accelerati per AB ad tempus motûs accelerati per BC ut G ad rectam BF,

et inter rectas BF, CF exponatur continue proportionalium series quarum maxima OF sit major quàm G. Eodem quo usi sumus, in superiori demonstrationis parte, ratiocinio, conferendo spatia in ipsâ AB inter similes proportionales intercepta cum spatiis BO, OV, VX, XC, mutemus solummodo velocitates uniformes et fingamus, verbi gratia, motum per AR uniformem fieri juxta gradum velocitatis in puncto A acquisitæ; motum vero uniformem per BO fieri juxta velocitatem acquisitam in puncto O; et sic in reliquis spatiis, in quibus patet omnes velocitates per AB uniformes augeri, velocitates verò per BC uniformes minui, contra id quod in priore demonstrationis parte fuerat usurpatum.

Concludetur, ut supra,

tempus motûs hujusmodi uniformis per AR
ad tempus motûs uniformis per BO
esse ut recta RF ad rectam AF :

dum enim augentur velocitates, tempora motuum minuuntur.

Similiter

tempus motûs uniformis per RM ad tempus motûs uniformis per OV erit ut MF ad MR.

Denique

tempus motûs fictitii illius per AB ex uniformibus compositi
ad tempus motûs fictitii per BC ex uniformibus pariter compositi
erit ut RF ad AF,

cùm omnes rationes sint eædem, hoc est, ut OF ad BF, per primam propositionem.

Tempus autem motûs accelerati per AB est majus tempore motûs illius fictitii ex uniformibus compositi, cùm supposuerimus in motibus uniformibus auctas fuisse velocitates, quæ nimirum in hoc casu primis spatiorum AR, RM, etc. punctis respondent; sed et tempus motûs accelerati per BC est minus tempore motûs fictitii ex uniformibus compositi, quia hic velocitates minuuntur et ultimis spatiorum BO, OV, etc. punctis respondent : ergo

major est ratio temporis motûs accelerati per $<$ AB
ad tempus motûs accelerati per $>$ BC
quàm temporis motûs fictitii per AB
ad tempus motûs fictitii per BC.

Sed

ut tempus motûs accelerati per AB ad tempus motûs accelerati per BC,
ita est recta G ad rectam BF,

ex suppositione; ut autem

tempus motûs fictitii per AB ad tempus motûs fictitii per BC,
ita recta OF ad BF,

ex demonstratione : ergo

recta G ad rectam BF majorem proportionem habet
quàm recta OF ad rectam BF,

quod est absurdum, cùm recta G sit minor rectâ OF, ex constructione.

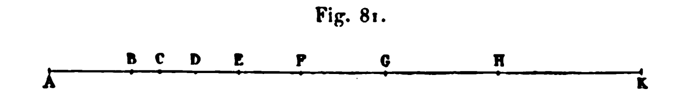
Non ergo tempus motûs accelerati per AB est minus tempore motûs accelerati per BC; sed nec majus, ut supra demonstratum est : *ergo est æquale.*

Eadem ratione patet tempus motûs accelerati per CD æquari tempori motûs accelerati per AB, et tempori motûs accelerati per BC, et, continuatis, si placet, in infinitum rationibus, *omnia omnino spatia eodem tempore percurri.*

5. His positis, *tertiâ propositione* mentem Galilei revelamus aut propositionis veritatem astruimus.

Intelligatur motus gravium descendentium a quiete ex puncto A (*fig.* 81) usque ad punctum H, verbi gratia, et *supponatur, si fieri*

Fig. 81.



potest, velocitatem gravis cadentis accelerari juxta rationem spatiorum decursorum. Ponatur motus jam factus ab A usque ad H tempore unius minuti aut altero quovis tempore determinato, et supponatur motus continuari usque ad punctum K : *Aio motum per* HK *fieri in instanti.*

Si enim motus per HK non fiat in instanti, fiet in tempore aliquo determinato, quod, per aliquem numerum multiplicatum, excedet tempus in decursu spatii AH insumptum; ponatur numerus multiplicans 5, ita ut tempus motûs per HK *quinquies* sumptum excedat tempus motûs per AH.

Rectis KA, HA sumatur tertia proportionalis GA et toties continuetur proportionalium series, donec spatiorum interceptorum numerus excedat numerum 5; fiant ergo, ex proportionalibus continuatis, *sex*, verbi gratia, spatia ultra punctum H, quæ sint HG, GF, FE, ED, DC, CB.

Ergo tempus motûs per HG, per præcedentem, est æquale tempori motûs per HK.

Similiter tempus motûs per GF est æquale tempori motûs per HK.

Denique motus per totam HB fiet in tempore quod ad tempus per HK erit sextuplum; at tempus temporis per HK quintuplum est majus tempore motûs per AH : ergo a fortiori tempus motûs per HB tempore motûs per totam HA est majus. Quod est absurdum.

Ergo vera remanet Galilei illatio quamvis eam ipse non demonstrarit.

6. Hæc breviter et familiariter, Clarissime Gassende, scripsimus, ne tibi in posterum facessat negotium aut Cazræus aut quivis alius Galilei adversarius, et in immensum excrescant volumina, quæ unicà demonstratione, vel fatentibus ipsis auctoribus, aut destruentur aut inutilia et superflua efficientur. Vale.

ANNÉE 1648.

LXIII.

FERMAT A MERSENNE (1).

JEUDI 4 JUIN 1648.

(B₁, 2 v°.)

Voici la construction de la question des trois triangles *quorum areæ constituunt tria latera trianguli rectanguli numero* (2).

Trouvons un triangle de telle sorte que la somme de l'hypoténuse et de l'un des côtés soit quadruple de l'autre côté.

Ce qui est fait ainsi. Soit le dit triangle :

R	S	T
17	15	8

Formabuntur tria triangula rectangula :

primum	*abs*	R + 4S	*et*	2R — 4S,
secundum	*abs*	6S	*et*	R — 2S,
tertium	*abs*	4S + T	*et*	4S — 2T.

(1) Fragment de lettre inédit.
(2) *Cp.* l'Observation XXIX sur Diophante.

Hoc est : in hoc exemplo in specie formabitur :

primum abs 49 *et* 2,
secundum abs 48 *et* 1,
tertium abs 47 *et* 2.

LXIV.

FERMAT A SÉGUIER (1).

MARDI 9 JUIN 1648.

(Bib. nat. fr. 17388, f° 74 r°.)

MONSEIGNEUR,

Je sçai que la vertu et le sçauoir sont les seules recommandations qui peuuent obtenir vostre protection, et que c'est sans doute auec trop de confiance que je prens la liberté de vous demender une grace (2) que i'aduoue n'auoir pas meritée. Mais ie sçai aussi, Monseigneur, que vous auës assés de bonté pour conter parmi les bonnes qualités l'inclination de les acquerir. C'est la seule qui ne m'a iamais abandonné et mon ambition a tousiours esté assés hardie pour me faire considerer les belles lettres comme une conqueste aisée en mesme temps que ie sentois bien et que l'experience m'a faict cognoistre qu'elle estoit au dessus de mes forces. C'est donc a des mouuements imparfaicts et au desir seul de meriter quelqu'une de vos faueurs que ie vous coniure, Monseigneur, d'accorder celle que M. de la Chambre a voulu prendre le soin de vous demender de ma part. Si ie ne suis pas

(1) Publiée par M. Charles Henry (*Recherches*, p. 63) d'après l'original dont nous reproduisons l'orthographe.

(2) Le 29 août 1648 Fermat fut député à Castres « pour tenir et desservir séance de la chambre de l'édit avec les présidents et conseillers de la religion prétendue réformée » (*Histoire générale du Languedoc*, tome XIV, Toulouse 1876, col. 206); c'est peut-être cette nomination qui faisait l'objet de la présente requête.

capable de m'en rendre digne a l'aduenir, ie la recognoistrai du moins par le respect auec lequel ie veus estre toute ma uie,

Monseigneur,
Vostre tres humble, tres obeissant
et tres obligé seruiteur,

FERMAT.

A Tolose le 9 iuin 1648.

(*Adresse.*)

A Monseigneur
Monseigneur le
Chancelier.
A Paris.

LXV.

FERMAT A LA CHAMBRE (MARTIN CUREAU DE) [1].

MARDI 18 AOUT 1648.

(Bib. Nat. fr. 17390, f° 115 r°.)

MONSIEUR,

Je ne vous ai point entretenu iusqu'ici d'affaires publiques, mais pource que les veritables mouvements d'un arrest que le parlement a donné n'ont pas esté peust estre cognus chez Monseigneur, i'ai dressé un mot d'escrit ou vous le treuueres, ie vous l'expose sur l'asseurance que i'ai et de vostre prudence et de l'honneur que vous me faictes de m'aymer. Il ne verra qu'autant de iour que vous voudres, outre que ma politique est tres foible et tres bornée, ie ne pretens par là vous faire paroistre que mon zele pour le seruice du roi et mon respect pour les volontés de Monseigneur. Si cest escrit ne peut pas seruir a cela

[1] Publiée par M. Charles Henry (*Recherches*, p. 67) d'après l'autographe.

mesme, excusés du moins mes fautes et faictes moi la grace de les tenir cachees et de me croire tousiours,

Monsieur,

Vostre tres humble et
tres obeissant seruiteur,

FERMAT.

A Tolose le 18 août 1648 (1).

(*Adresse.*)

A Monsieur
Monsieur de la Chambre
chez Monseigneur le
Chancelier.
A Paris.

LXVI.

NOTE DE FERMAT

JOINTE A LA LETTRE PRÉCÉDENTE (2).

(Bib. Nat. fr. 17390, f° 113.)

L'arrest que le parlement de Tolose a donné par lequel il est inhibé de leuer les tailles a main armée et par logements effectifs de gens de guerre, a esté si necessaire dans la conionture presente, qu'il n'y auoit apparament que ce seul remede pour faire subsister le calme dans la prouince de Guienne qui est dependante de ce ressort.

Le bruit qui s'estoit espandu par toutes les villes que le roi alloit quitter les arrerages des impositions et accorder une diminution considerable de la taille courante faisoit supporter au peuple auec tant

(1) Cette suscription est presque entièrement effacée : la date a été inscrite au verso par les commis de Séguier.

(2) Publiée par M. Charles Henry (*Recherches*, p. 68) d'après l'autographe.

d'impatience ces ordres seueres de logements effectifs qu'il se faisoit de touts costés des conspirations et des attroupements contre les brigades, et des rebellions si notables qu'elles eussent sans doute tramé de plus grands souslevements si le parlement n'eust suspendu par son arrest ces ordres violents qui sont contre les ordonnances et contre l'humanité mesme, s'il faut ainsi parler. Depuis ce temps là on n'a point cessé de donner des arrests pour procurer en toute diligence le payement des tailles, on a mesme taché d'empescher diuers abbus pratiqués par les commis qu'on a descouuert qui faisoient faire des quittances antidatées pour s'approprier par ceste voye les deniers royaus et les diuertir a leur profit; le parlement en a faict informer, a donné arrest et comission là dessus, bref il n'a rien omis pour ce regard. J'ai esté le premier qui ai eu quelque cognoissance des voyes obliques et qui ai suggéré à quelques uns de la Grande Chambre l'arrest qui est donné sur ce subject.

Je ne laisse pas de vous aduouer que ces remedes sont lents et que le payement des tailles l'est encore d'advantage, depuis que ceste grande rudesse de l'exaction a cessé, la raison est claire, la pauureté est si generalle et si grande, et les charges si hautes que des que ceste constrainte armée a cessé, rien ne paroist d'assés fort pour faire payer les contribuables, les saisies qui estoient l'extreme dans les voyes reglees commencent de n'effrayer plus et sont plustost des menaces que des coups.

Il faut pourtant haster les leuees et donner promptement au roi un secours si iuste et si necessaire. Il me semble que l'expedient le plus plausible et le plus aisé seroit d'auoir une declaration du roi qui portast permission a toutes les communautés d'emprunter les sommes necessaires a concurrence des tailles courantes et qui declarast les sommes empruntées audict effect priuilegiees a toutes debtes desd. communautés comme destinées au payement des charges courantes. Il est tres probable que tout l'argent de la prouince aboutiroit là, pource que la frequence des banqueroutes est cause que ceux qui ont de l'argent ayment mieux le garder que le hazarder. Ceste decla-

ration signée du registre du parlement seroit une asseurance entiere pour les creanciers et si le roi accordoit quelque remise pour l'auance, toutes les communautés accourroient en foulle pour emprunter les deniers necessaires et les payer tout aussi tost aux receueurs. On pourroit mesme enjoindre au parlement d'enuoyer des comissaires dans toutes les uilles pour faciliter lesd. payements, et si sa maiesté iugeoit qu'il fust important pour le bien de son estat de se seruir de ce mesme moyen pour faire approcher les deniers de l'an 1649, l'execution n'en seroit pas apparament malaisée.

LXVII.

FERMAT A MERSENNE (?).

FRAGMENT (1).

1648.

(D, III, 83.)

Asymmetrias in Algebraïcis omnino tollere, opus arduum nec satis hactenus ab Analystis tentatum.

Dentur, verbi gratia, termini asymmetri plures quatuor et secundum artis præcepta proponantur asymmetria liberandi. Vix est ut ab hujusmodi tricis expediat se Analysta : dum crescet labor, augebitur difficultas et fatigatus tandem, nihil, post repetitas sæpius operationes, aut profecisse se aut promovisse deprehendet. An itaque hærebit Analysis et asymmetriis undique obruta conticescet? Videant eruditi et methodum huic negotio conducibilem inquirant.

(1) Tiré d'une Lettre de Descartes à M***, datée du 18 décembre 1648, où ce fragment est précédé des mots : *Voici maintenant le billet de M. de Fermat,* et suivi d'une réponse de Descartes à la question posée. La partie latine, qui dans l'édition Clerselier est composée en italiques avec les lettres de l'équation en minuscules, est traduite en français (édition Cousin, tome X, p. 169).

Proponatur in exemplum :

latus(B in A — A quad.) + lat.(Z quad. + D in A + A quad.)
+ lat.(M in A) + lat.(D quad. — A quad.).
— latere(R in A + A quad.) æquari B + A.

Operetur secundum præcepta artis Analysta et ab asymmetria proposita se expediat, aut artis inefficaciam fateatur (1).

Il me semble que les illustres en cette Science ne sauroient prendre un plus digne et plus nécessaire emploi que celui d'aplanir ces difficultés. Pour les y exciter, vous leur pourriez dire par avance que j'ai fait quelque progrès en cette matière et qu'il y a beaucoup à découvrir et à inventer; vous pourriez même en écrire en Italie et en Hollande, afin que la prophétie du Chancelier d'Angleterre s'accomplisse : *Multi pertransibunt et augebitur scientia* (2).

(1) *Voir* Tome I, p. 181-188.
(2) *Voir* plus haut, p. 35, note 2.

ANNÉE 1650.

LXVIII.

FERMAT A CARCAVI ([1]).

SAMEDI 20 AOUT 1650.

(Bibl. nat., lat. 11196, f^{os} 54-55)

MONSIEUR,

1. Ma lettre par malheur fut envoyée trop tard la semaine dernière au messager d'Aurillac; vous la recevrez seulement par celui-ci avec la pénitence que je me suis enjoint à moi-même pour payer ce retardement, c'est-à-dire que je n'ai point voulu différer à vous envoyer ma méthode générale pour le débrouillement des *asymmétries* ([2]). Les fêtes m'ont tout à propos donné le loisir nécessaire pour y vaquer; je vous envoye mon original par pure paresse et vous prie me le renvoyer au plus tôt ou bien un autre à votre choix. Vous ménagerez mes intérêts comme vous l'entendez; ils consistent seulement à me laisser la satisfaction (j'use à dessein d'un mot adouci) d'avoir dévoilé une matière qui n'étoit pas connue, ce que diverses questions, que je vous ai proposées à diverses fois et dont pas une solution n'a jamais été donnée, prouvent assez suffisamment.

2. Mais, si vous voulez avoir le plaisir tout entier, proposez hardiment à trouver la tangente d'une courbe dont, par exemple, la pro-

([1]) Publiée par M. Charles Henry (*Recherches*, p. 193).
([2]) C'est la méthode d'élimination des radicaux, exposée tome I, p. 181-188.

priété soit, en prenant A pour l'appliquée et E pour la portion du diamètre qui lui correspond :

Latus cub. (Z*q*. in A — A*c*.) + *lat. quad. quad.* (B*pl. pl.* — D*q*. in B in A + A*qq*.)
+ *lat. quad.* (B in A — A*q*.) + *lat. quad. cub.* (A*qc*. — B*qq*. in A).

Hæc omnia quatuor homogenea, quæ, in hoc casu, sunt rectæ, æquentur

B + A — E.

Quæritur tangens ad punctum datum in curva cujus superior æqualitas proprietatem specificam repræsentat.

Que fera en ce rencontre la méthode de M. Descartes que vous savez être infiniment plus embarrassée que la mienne? mais que fera encore la mienne, si les asymmétries ne sont ôtées?

Pour les ôter, la méthode que je vous envoye en vient à bout sans nulle difficulté, car, en donnant à chacune des lignes irrationelles le nom d'une seconde racine, tierce, quarte et cæt., on vient toujours à des doubles égalités lesquelles se réitèrent jusques à ce que l'application (ou la division) ôte la dernière de ces racines, puis la pénultième, et ainsi en rétrogradant jusques à ce que toutes les nouvelles racines inconnues que vous aurez prises à discrétion aient entièrement disparu, et pour lors il vous restera une équation sans asymmétrie en laquelle il n'y aura de racines inconnues que les deux premières A et E, qui n'auront que changé de degré à cause des multiplications fréquentes et nécessaires à chaque opération, et cette équation exempte d'asymmétrie représentera la propriété spécifique de la courbe.

Or, quand nous avons la propriété spécifique de la courbe sans asymmétrie, ma méthode *de tangentibus* donne la tangente très simplement et par la seule application à tous les cas généralement, soit que la propriété spécifique aie relation à des lignes droites seulement, soit qu'elle l'aie aussi à des courbes. Et partant, en joignant les deux méthodes, la tangente de la question proposée se trouve par l'application simple, ce qui semble merveilleux.

Je n'ajoute pas l'opération entière, pource que la longueur du travail me lasseroit, mais, en un mot, il suffit que vous voyez très clairement le progrès et la fin de l'ouvrage; ce que je crois avoir été inconnu jusques à présent, puisque M. Descartes, que je nomme avec tout le respect qui est dû à la mémoire d'un si merveilleux homme, proposoit comme une difficulté insurmontable la question suivante :

Étant donnés quatre points et une courbe, en laquelle prenant un point à discrétion, les droites menées de ce point aux quatre donnés fassent une somme donnée, trouver une tangente à quelconque point donné de cette courbe.

ainsi que je puis faire voir par une de ses lettres [1]. Pourtant, mes méthodes jointes ensemble en donnent la solution simple, et l'opération < se fait > en se jouant.

Vous comprenez par là que le principal et plus considérable effet de cette méthode paroît aux tangentes de toutes sortes de lignes courbes à l'infini, puisque les tangentes s'y trouvent toujours par application simple, et après cela aux questions que j'appelle *abondantes*, qui se résolvent aussi par la seule division, sans aucune extraction de racines et cæt.

3. En voilà trop pour une seconde lettre, mais je suis d'humeur à vous faire paroître ce que peut notre ancienne amitié. Peut-être que ces petits éclaircissements serviront à ce qu'il y aura de trop concis dans mon écrit latin, quoique je ne doute point qu'après que vous et messieurs à qui vous le communiquerez y auront un peu rêvé, ils n'en trouvent l'intelligence et la pratique aisée.

Je n'ai qu'à vous avertir que l'ordre des pages de mon petit Traité est marqué par chiffres, et qu'il y a un endroit, en la page septième, qui semble défectueux, qui pourtant ne l'est pas, et il faut tout écrire comme un sens continu, ainsi que vous comprendrez d'abord.

(1) Cette lettre n'a pas été conservée.

Je vous réitère encore que je vous renvoierai vos écrits de mes Traités au plus tôt avec le Livre de M. Gaignières ([1]), sinon que vous en trouviez à Paris un autre exemplaire, auquel cas vous m'obligerez de le bailler à mondit Sr Gaignières, et j'en rembourserai le prix au messager qui vous porte mes lettres.

Je suis, Monsieur, votre du tout acquis serviteur,

FERMAT.

A Castres, ce 20 août 1650.

([1]) La suite de la phrase montre qu'il s'agit d'un ouvrage prêté par Gaignières. Celui-ci n'est pas Roger de Gaignières dont les collections ont enrichi la Bibliothèque du roi, puisque ce célèbre collectionneur est né vers 1644, mais sans doute son père Aimé de Gaignières, secrétaire du duc de Bellegarde, gouverneur de Bourgogne. (Léopold Delisle, *Le cabinet des manuscrits*, Tome I, p. 335.)

ANNÉE 1654.

LXIX.

FERMAT A PASCAL (1).

1654.

(*Œuvres de Pascal*, 1779, IV, p. 441-442.)

MONSIEUR,

Si j'entreprends de faire un point avec un seul dé en huit coups; si nous convenons, après que l'argent est dans le jeu, que je ne jouerai pas le premier coup, il faut, par mon principe, que je tire du jeu $\frac{1}{6}$ du total pour être désintéressé, à raison dudit premier coup.

Que si encore nous convenons après cela que je ne jouerai pas le second coup, je dois, pour mon indemnité, tirer le 6me du restant, qui est $\frac{5}{36}$ du total.

Et si après cela nous convenons que je ne jouerai pas le troisième coup, je dois, pour mon indemnité, tirer le 6me du restant, qui est $\frac{25}{216}$ du total.

Et si après cela nous convenons encore que je ne jouerai pas le quatrième coup, je dois tirer le 6me du restant, qui est $\frac{125}{1296}$ du total, et je conviens avec vous que c'est la valeur du quatrième coup, supposé qu'on ait déjà traité des précédents.

Mais vous me proposez dans l'exemple dernier de votre lettre (je

(1) « Imprimée pour la première fois. Cette Lettre est sans date dans la copie que j'en ai; elle paroît répondre à une lettre de Pascal que je n'ai pu recouvrer. » (*Note de Bossut.*) — L'éditeur des *Œuvres de Pascal* a d'ailleurs placé cette Lettre entre celles numérotées ci-après LXXIV et LXXV.

mets vos propres termes) que si j'entreprends de trouver le six en huit coups et que j'en aie joué trois sans le rencontrer, si mon joueur me propose de ne point jouer mon quatrième coup et qu'il veuille me désintéresser à cause que je pourrois le rencontrer, il m'appartiendra $\frac{125}{1296}$ de la somme entière de nos mises.

Ce qui pourtant n'est pas vrai, suivant mon principe. Car, en ce cas, les trois premiers coups n'ayant rien acquis à celui qui tient le dé, la somme totale restant dans le jeu, celui qui tient le dé et qui convient de ne pas jouer son quatrième coup, doit prendre pour son indemnité $\frac{1}{6}$ du total.

Et s'il avoit joué quatre coups sans trouver le point cherché et qu'on convînt qu'il ne joueroit pas le cinquième, il auroit de même pour son indemnité $\frac{1}{6}$ du total. Car la somme entière restant dans le jeu, il ne suit pas seulement du principe, mais il est de même du sens naturel que chaque coup doit donner un égal avantage.

Je vous prie donc que je sache si nous sommes conformes au principe, ainsi que je crois, ou si nous différons seulement en l'application.

Je suis, de tout mon cœur, etc.

FERMAT.

LXX.

PASCAL A FERMAT.

MERCREDI 29 JUILLET 1654.

(Va, p. 179-183.)

MONSIEUR,

1. L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir, de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de

m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis ([1]) des dés et des parties dans la parfaite justesse : j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

J'admire bien davantage la méthode des parties que celle des dés; j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval : mais M. de Méré n'avoit jamais pu trouver la juste valeur des parties ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvois seul qui eûsse connu cette proportion.

2. Votre méthode est très-sûre et est celle qui m'est la première venue à la pensée dans cette recherche; mais, parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrois vous pouvoir dire ici en peu de mots : car je voudrois désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvoit, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.

Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en *trois* parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :

Posons que le premier en ait *deux* et l'autre *une;* ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils sont *deux* parties à *deux* parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles.

([1]) *Parti* signifie ici répartition entre des joueurs, d'après leurs chances relatives, de la masse des enjeux, dans le cas où le jeu est abandonné avant sa fin.

Le *parti des dés* dont il s'agit ici paraît avoir été simplement demandé dans le cas où celui qui tient les dés a parié d'amener un point déterminé en un nombre de coups convenu (*voir* Lettre LXIX et ci-après, LXX, **7**).

Quant au *parti des parties*, la question est clairement exposée ci-après (**2** à **6**). *Comparer*, à la suite du *Traité du triangle arithmétique* de Pascal, l'application qui en est faite à ce même problème (*Œuvres de Pascal*, édition de 1779, V, p. 32).

Considérez donc, Monsieur, que, si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc, s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : « Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne; mais » pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez, le » hasard est égal. Partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me » donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres. » Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait *deux* parties et l'autre *point*, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura *deux* parties et l'autre *une*.

Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient, à celui qui a les *deux* parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : « Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64; » si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi » les 48 qui me sont certaines, au cas même que je perde, et partageons » les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous » les gagniez comme moi. » Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.

Posons enfin que le premier n'ait qu'*une* partie et l'autre *point*. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura *deux* parties à *point*, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56; s'il la perd, ils sont partie à partie : donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : « Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont » sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, » reste 24; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12 et moi 12, » qui, avec 32, font 44. »

Or, par ce moyen, vous voyez, par les simples soustractions, que, pour la première partie, il appartient sur l'argent de l'autre 12 pistoles; pour la seconde, autres 12; et pour la dernière, 8.

Or, pour ne plus faire de mystère, puisque vous voyez aussi bien

tout à découvert et que je n'en faisois que pour voir si je ne me trompois pas, la valeur (j'entends sa valeur sur l'argent de l'autre seulement) de la dernière partie de *deux* est double de la <dernière> partie de *trois* et quadruple de la dernière partie de *quatre* et octuple de la dernière partie de *cinq*, etc.

3. Mais la proportion des premières parties n'est pas si aisée à trouver : elle est donc ainsi, car je ne veux rien déguiser, et voici le problème dont je faisois tant de cas, comme en effet il me plait fort :

Étant donné tel nombre de parties qu'on voudra, trouver la valeur de la première.

Soit le nombre des parties donné, par exemple 8. Prenez les *huit* premiers nombres pairs et les *huit* premiers nombres impairs, savoir :

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16

et

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

Multipliez les nombres pairs en cette sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, le produit par le quatrième, le produit par le cinquième, etc.; multipliez les nombres impairs de la même sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, etc.

Le dernier produit des pairs est le *dénominateur* et le dernier produit des impairs est le *numérateur* de la fraction qui exprime la valeur de la première partie de *huit* : c'est-à-dire que, si on joue chacun le nombre de pistoles exprimé par le produit des pairs, il en appartiendroit sur l'argent de l'autre le nombre exprimé par le produit des impairs.

Ce qui se démontre, mais avec beaucoup de peine, par les combinaisons telles que vous les avez imaginées, et je n'ai pu le démontrer par cette autre voie que je viens de vous dire, mais seulement par celle des combinaisons. Et voici les propositions qui y mènent, qui sont proprement des propositions arithmétiques touchant les combinaisons, dont j'ai d'assez belles propriétés :

4. Si d'un nombre quelconque de lettres, par exemple de 8 :

A, B, C, D, E, F, G, H,

vous en prenez toutes les combinaisons possibles de 4 lettres et ensuite toutes les combinaisons possibles de 5 lettres, et puis de 6, de 7 et de 8, etc., et qu'ainsi vous preniez toutes les combinaisons possibles depuis la multitude qui est la moitié de la toute jusqu'au tout, je dis que, si vous joignez ensemble la moitié de la combinaison de 4 avec chacune des combinaisons supérieures, la somme sera le nombre tantième de la progression quaternaire à commencer par le binaire, qui est la moitié de la multitude.

Par exemple, et je vous le dirai en latin, car le français n'y vaut rien :

Si quotlibet litterarum, verbi gratia octo :

A, B, C, D, E, F, G, H,

sumantur omnes combinationes quaternarii, quinquenarii, senarii, etc., usque ad octonarium, dico, si jungas dimidium combinationis quaternarii, nempe 35 (*dimidium* 70), *cum omnibus combinationibus quinquenarii, nempe* 56, *plus omnibus combinationibus senarii, nempe* 28, *plus omnibus combinationibus septenarii, nempe* 8, *plus omnibus combinationibus octonarii, nempe* 1, *factum esse quartum numerum progressionis quaternarii cujus origo est* 2 : *dico quartum numerum, quia* 4 *octonarii dimidium est.*

Sunt enim numeri progressionis quaternarii, cujus origo est 2, *isti :*

2, 8, 32, 128, 512, *etc.*,

quorum 2 *primus est*, 8 *secundus*, 32 *tertius et* 128 *quartus : cui* 128 *æquantur*

+ 35 *dimidium combinationis* 4 *litterarum*
+ 56 *combinationis* 5 *litterarum*
+ 28 *combinationis* 6 *litterarum*
+ 8 *combinationis* 7 *litterarum*
+ 1 *combinationis* 8 *litterarum.*

5. Voilà la première proposition qui est purement arithmétique; l'autre regarde la doctrine des parties et est telle :

Il faut dire auparavant : si on a *une* partie de 5, par exemple, et qu'ainsi il en manque 4, le jeu sera infailliblement décidé en 8, qui est double de 4.

La valeur de la première partie de 5 sur l'argent de l'autre est la fraction qui a pour numérateur la moitié de la combinaison de 4 sur 8 (je prends 4 parce qu'il est égal au nombre des parties qui manque, et 8 parce qu'il est double de 4) et pour dénominateur ce même numérateur plus toutes les combinaisons supérieures.

Ainsi, si j'ai *une* partie de 5, il m'appartient, sur l'argent de mon joueur, $\frac{35}{128}$: c'est-à-dire que, s'il a mis 128 pistoles, j'en prends 35 et lui laisse le reste, 93.

Or cette fraction $\frac{35}{128}$ est la même que celle-là : $\frac{105}{384}$, laquelle est faite par la multiplication des pairs pour le dénominateur et la multiplication des impairs pour le numérateur.

Vous verrez bien sans doute tout cela, si vous vous en donnez tant soit peu la peine : c'est pourquoi je trouve inutile de vous en entretenir davantage.

6. Je vous envoie néanmoins une de mes vieilles Tables; je n'ai pas le loisir de la copier, je la referai.

Vous y verrez comme toujours que la valeur de la première partie est égale à celle de la seconde, ce qui se trouve aisément par les combinaisons.

Vous verrez de même que les nombres de la première ligne augmentent toujours; ceux de la seconde de même; ceux de la troisième de même.

Mais ensuite ceux de la quatrième diminuent; ceux de la cinquième, etc. Ce qui est étrange.

Il m'appartient, sur les 256 pistoles de mon joueur, pour la

	Si on joue chacun 256 en					
	6 parties.	5 parties.	4 parties.	3 parties.	2 parties.	1 partie.
1re partie	63	70	80	96	128	256
2e partie	63	70	80	96	128	
3e partie	56	60	64	64		
4e partie	42	40	32			
5e partie	24	16				
6e partie	8					

Il m'appartient, sur les 256 de mon joueur, pour

	Si on joue 256 chacun en					
	6 parties.	5 parties.	4 parties.	3 parties.	2 parties.	1 partie.
la 1re partie	63	70	80	96	128	256
les 2 premières parties	126	140	160	192	256	
les 3 premières parties	182	200	224	256		
les 4 premières parties	224	240	256			
les 5 premières parties	248	256				
les 6 premières parties	256					

7. Je n'ai pas le temps de vous envoyer la démonstration d'une difficulté qui étonnoit fort M. < de Méré >, car il a très bon esprit, mais il n'est pas géomètre (c'est, comme vous savez, un grand défaut) et

même il ne comprend pas qu'une ligne mathématique soit divisible à l'infini et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini, et jamais je n'ai pu l'en tirer. Si vous le pouviez faire, on le rendroit parfait.

Il me disoit donc qu'il avoit trouvé fausseté dans les nombres par cette raison :

Si on entreprend de faire un *six* avec un dé, il y a avantage de l'entreprendre en 4, comme de 671 à 625.

Si on entreprend de faire *sonnés* avec deux dés, il y a désavantage de l'entreprendre en 24.

Et néanmoins 24 est à 36 (qui est le nombre des faces de deux dés) comme 4 à 6 (qui est le nombre des faces d'un dé).

Voilà quel étoit son grand scandale qui lui faisoit dire hautement que les propositions n'étoient pas constantes et que l'Arithmétique se démentoit : mais vous en verrez bien aisément la raison par les principes où vous êtes.

Je mettrai par ordre tout ce que j'en ai fait, quand j'aurai achevé des Traités géométriques où je travaille il y a déjà quelque temps.

8. J'en ai fait aussi d'arithmétiques, sur le sujet desquels je vous supplie de me mander votre avis sur cette démonstration.

Je pose le lemme que tout le monde sait : que la somme de tant de nombres qu'on voudra de la progression continue depuis l'unité, comme

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

étant prise deux fois, est égale au dernier, 4, mené dans le prochainement plus grand, 5 : c'est-à-dire que la somme des nombres contenus dans A, étant prise deux fois, est égale au produit

$$A \text{ in } (A+1).$$

Maintenant je viens à ma proposition :

Duorum quorumlibet cuborum proximorum differentia, unitate demptâ, sextupla est omnium numerorum in minoris radice contentorum.

Sint duæ radices R, S unitate differentes : dico
$R^3 - S^3 - 1$ *æquari summæ numerorum in S contentorum sexies sumptæ.*
Etenim S vocetur A : ergo R est

$$A + 1.$$

Igitur cubus radicis R, seu $A + 1$, *est*

$$A^3 + 3A^2 + 3A + 1^3.$$

Cubus vero S, seu A, est

$$A^3,$$

et horum differentia est

$$3A^2 + 3A + 1^3,$$

id est $R^3 - S^3$; *igitur, si auferatur unitas,*

$$3A^2 + 3A \quad \textit{æq.} \quad R^3 - S^3 - 1.$$

Sed duplum summæ numerorum in A seu S contentorum æquatur, ex lemmate,

$$A \textit{ in } (A + 1), \quad \textit{hoc est} \quad A^2 + A :$$

igitur sextuplum summæ numerorum in A contentorum æquatur

$$3A^2 + 3A.$$

Sed

$$3A^2 + 3A \quad \textit{æq.} \quad R^3 - S^3 - 1;$$

igitur

$$R^3 - S^3 - 1 \textit{ æq. sextuplo summæ numerorum in A seu S contentorum.}$$

Quod erat demonstrandum.

On ne m'a pas fait de difficulté là-dessus, mais on m'a dit qu'on ne m'en faisoit pas par cette raison que tout le monde est accoutumé aujourd'hui à cette méthode; et moi je prétends que, sans me faire grâce, on doit admettre cette démonstration comme d'un genre excellent : j'en attends néanmoins votre avis avec toute soumission.

Tout ce que j'ai démontré en Arithmétique est de cette nature.

9. Voici encore deux difficultés :

J'ai démontré une proposition plane en me servant du cube d'une ligne comparé au cube d'une autre : je prétends que cela est purement géométrique et dans la sévérité la plus grande.

De même j'ai résolu le problème :

De quatre plans, quatre points et quatre sphères, quatre quelconques étant donnés, trouver une sphère qui, touchant les sphères données, passe par les points donnés et laisse sur les plans des portions de sphères capables d'angles donnés,

et celui-ci :

De trois cercles, trois points, trois lignes, < trois > quelconques étant donnés, trouver un cercle qui, touchant les cercles et les points, laisse sur les lignes un arc capable d'angle donné.

J'ai résolu ces problèmes *plainement*, n'employant dans la construction que des cercles et des lignes droites; mais, dans la démonstration, je me sers de lieux solides, de paraboles ou hyperboles : je prétends néanmoins qu'attendu que la construction est plane, ma solution est plane et doit passer pour telle.

C'est bien mal reconnaître l'honneur que vous me faites de souffrir mes entretiens que de vous importuner si longtemps; je ne pense jamais vous dire que deux mots, et si je ne vous dis pas ce que j'ai le plus sur le cœur, qui est que, plus je vous connois, plus je vous admire et vous honore et que, si vous voyiez à quel point cela est, vous donneriez une place dans votre amitié à celui qui est, Monsieur, votre etc.

LXXI.

FERMAT A CARCAVI [1].

DIMANCHE 9 AOUT 1654.

(*Œuvres de Pascal*, IV, p. 444-445.)

Monsieur,

1. J'ai été ravi d'avoir eu des sentiments conformes à ceux de M. Pascal, car j'estime infiniment son génie et je le crois très capable de venir à bout de tout ce qu'il entreprendra: L'amitié qu'il m'offre m'est si chère et si considérable que je crois ne devoir point faire difficulté d'en faire quelque usage en l'impression de mes Traités.

Si cela ne vous choquoit point, vous pourriez tous deux procurer cette impression, de laquelle je consens que vous soyez les maîtres; vous pourriez éclaircir ou augmenter ce qui semble trop concis et me décharger d'un soin que mes occupations m'empêchent de prendre. Je désire même que cet Ouvrage paroisse sans mon nom, vous remettant, à cela près, le choix de toutes les désignations qui pourront marquer le nom de l'auteur que vous qualifierez votre ami.

2. Voici le biais que j'ai imaginé pour la seconde Partie qui contiendra mes inventions pour les nombres. C'est un travail qui n'est encore qu'une idée, et que je n'aurois pas le loisir de coucher au long sur le papier; mais j'enverrai succinctement à M. Pascal tous mes principes et mes premières démonstrations, de quoi je vous réponds à l'avance qu'il tirera des choses non seulement nouvelles et jusqu'ici inconnues, mais encore surprenantes.

Si vous joignez votre travail avec le sien, tout pourra succéder et

[1] L'autographe de cette lettre a fait partie de la Collection Benjamin Fillon et a passé en vente le 16 février 1877 (*Inventaire des autographes et des documents historiques composant la collection de M. Benjamin Fillon*, séries I et II. Paris, Étienne Charavay, 1877, p. 9-10). On trouve reproduit dans ce catalogue le § 1 de cette lettre, et de plus, facsimilés, la signature, la date et les mots « Vostre tres humble et tres obeissant serviteur », ces derniers supprimés dans l'édition.

s'achever dans peu de temps, et cependant on pourra mettre au jour la première Partie que vous avez en votre pouvoir.

Si M. Pascal goûte mon ouverture, qui est principalement fondée sur la grande estime que je fais de son génie, de son savoir et de son esprit, je commencerai d'abord à vous faire part de mes inventions numériques. Adieu.

Je suis, Monsieur, votre très humble et très obéissant serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 9 août 1654.

LXXII.

PASCAL A FERMAT.

LUNDI 24 AOUT 1654.

(*Va*, p. 184-188.)

MONSIEUR,

1. Je ne pus vous ouvrir ma pensée entière touchant les partis de plusieurs joueurs par l'ordinaire passé, et même j'ai quelque répugnance à le faire, de peur qu'en ceci cette admirable convenance, qui étoit entre nous et qui m'étoit si chère, ne commence à se démentir, car je crains que nous ne soyons de différents avis sur ce sujet. Je vous veux ouvrir toutes mes raisons, et vous me ferez la grâce de me redresser, si j'erre, ou de m'affermir, si j'ai bien rencontré. Je vous le demande tout de bon et sincèrement, car je ne me tiendrai pour certain que quand vous serez de mon côté.

Quand il n'y a que *deux* joueurs, votre méthode, qui procède par les combinaisons, est très sûre; mais, quand il y en a *trois*, je crois avoir démonstration qu'elle est mal juste, si ce n'est que vous y procédiez de quelque autre manière que je n'entends pas. Mais la méthode que je vous ai ouverte et dont je me sers partout est commune à

toutes les conditions imaginables de toutes sortes de partis, au lieu que celle des combinaisons (dont je ne me sers qu'aux rencontres particulières où elle est plus courte que la générale) n'est bonne qu'en ces seules occasions et non pas aux autres.

Je suis sûr que je me donnerai à entendre, mais il me faudra un peu de discours et à vous un peu de patience.

2. Voici comment vous procédez quand il y a *deux* joueurs :

Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque *deux* parties au premier et *trois* au second, pour trouver le parti, il faut, dites-vous, voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.

Il est aisé de supputer que ce sera en *quatre* parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours-là, si je ne l'eusse su de moi-même auparavant; aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisqu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties); et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes. Cela est aisé à supputer : ils en peuvent avoir *seize* qui est le second degré de *quatre*, c'est-à-dire le quarré. Car figurons-nous qu'une des faces est marquée *a*, favorable au premier joueur, et l'autre *b*, favorable au second; donc ces quatre dés peuvent s'asseoir sur une de ces seize assiettes :

a	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*
a	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*
a	*a*	*b*	*b*	*a*	*a*	*b*	*b*	*a*	*a*	*b*	*b*	*a*	*a*	*b*	*b*
a	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*	*a*	*b*
1	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	2	1	2	2	2

et, parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux *a* le font gagner : donc il en a 11 pour lui; et parce qu'il y manque trois parties au second, toutes les faces où il y a trois *b* le peuvent faire gagner : donc il y en a 5. Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11 à 5.

Voilà votre méthode quand il y a *deux* joueurs; sur quoi vous dites que, s'il y en a davantage, il ne sera pas difficile de faire les partis par la même méthode.

3. Sur cela, Monsieur, j'ai à vous dire que ce parti pour deux joueurs, fondé sur les combinaisons, est très juste et très bon; mais que, s'il y a plus de deux joueurs, il ne sera pas toujours juste et je vous dirai la raison de cette différence.

Je communiquai votre méthode à nos Messieurs, sur quoi M. de Roberval me fit cette objection :

Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en *quatre* parties, vu que, quand il manque *deux* parties à l'un et *trois* à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue *quatre* parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que *deux* ou *trois*, ou à la vérité peut-être *quatre;*

Et ainsi qu'il ne voyoit pas pourquoi on prétendoit de faire le parti juste sur une condition feinte qu'on jouera *quatre* parties, vu que la condition naturelle du jeu est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné, et qu'au moins, si cela n'étoit faux, cela n'étoit pas démontré, de sorte qu'il avoit quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme.

Je lui répondis que je ne me fondois pas tant sur cette méthode des combinaisons, laquelle véritablement n'est pas en son lieu en cette occasion, comme sur mon autre méthode universelle, à qui rien n'échappe et qui porte sa démonstration avec soi, qui trouve le même parti précisément que celle des combinaisons; et de plus je lui démontrai la vérité du parti entre deux joueurs par les combinaisons en cette sorte :

N'est-il pas vrai que, si deux joueurs, se trouvant en cet état de

l'hypothèse qu'il manque *deux* parties à l'un et *trois* à l'autre, conviennent maintenant de gré à gré qu'on joue *quatre* parties complètes, c'est-à-dire qu'on jette les quatre dés à deux faces tous à la fois, n'est-il pas vrai, dis-je, que, s'ils ont délibéré de jouer les quatre parties, le parti doit être, tel que nous avons dit, suivant la multitude des assiettes favorables à chacun?

Il en demeura d'accord et cela en effet est démonstratif; mais il nioit que la même chose subsistât en ne s'astreignant pas à jouer les *quatre* parties. Je lui dis donc ainsi :

N'est-il pas clair que les mêmes joueurs, n'étant pas astreints à jouer $<$ les $>$ quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un auroit atteint son nombre, peuvent sans dommage ni avantage s'astreindre à jouer les quatre parties entières et que cette convention ne change en aucune manière leur condition? Car, si le premier gagne les deux premières parties de *quatre* et qu'ainsi il ait gagné, refusera-t-il de jouer encore deux parties, vu que, s'il les gagne, il n'a pas mieux gagné, et s'il les perd, il n'a pas moins gagné? car ces deux que l'autre a gagné ne lui suffisent pas, puisqu'il lui en faut trois, et ainsi il n'y a pas assez de quatre parties pour faire qu'ils puissent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.

Certainement il est aisé de considérer qu'il est absolument égal et indifférent à l'un et à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu, qui est de finir dès qu'un aura son compte, ou de jouer les quatre parties entières : donc, puisque ces deux conditions sont égales et indifférentes, le parti doit être tout pareil en l'une et en l'autre. Or, il est juste quand ils sont obligés de jouer quatre parties, comme je l'ai montré : donc il est juste aussi en l'autre cas.

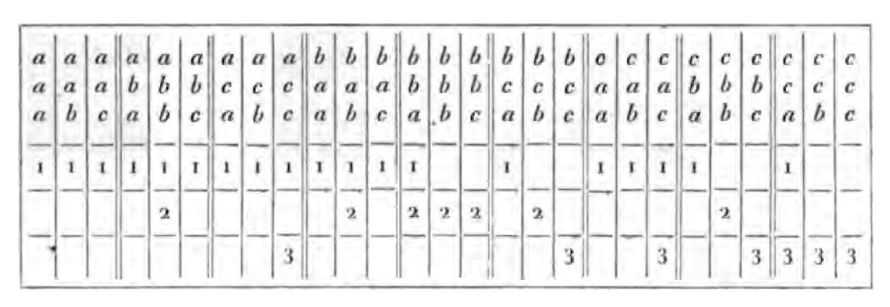
Voilà comment je le démontrai et, si vous y prenez garde, cette démonstration est fondée sur l'égalité des deux conditions, vraie et feinte, à l'égard de deux joueurs, et qu'en l'une et en l'autre un même gagnera toujours et, si l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre et jamais deux n'auront leur compte.

4. Suivons la même pointe pour *trois* joueurs et posons qu'il manque

une partie au premier, qu'il en manque *deux* au second et *deux* au troisième. Pour faire le parti, suivant la même méthode des combinaisons, il faut chercher d'abord en combien de parties le jeu sera décidé, comme nous avons fait quand il y avoit deux joueurs : ce sera en *trois*, car ils ne sauroient jouer *trios* parties sans que la décision soit arrivée nécessairement.

Il faut voir maintenant combien trois parties se combinent entre trois joueurs et combien il y en a de favorables à l'un, combien à l'autre et combien au dernier et, suivant cette proportion, distribuer l'argent de même qu'on a fait en l'hypothèse de deux joueurs.

Pour voir combien il y a de combinaisons en tout, cela est aisé : c'est la troisième puissance de 3, c'est-à-dire son cube 27. Car, si on jette *trois* dés à la fois (puisqu'il faut jouer trois parties), qui aient chacun *trois* faces (puisqu'il y a trois joueurs), l'une marquée *a* favorable au premier, l'autre *b* pour le second, l'autre *c* pour le troisième, il est manifeste que ces trois dés jetés ensemble peuvent s'asseoir sur 27 assiettes différentes, savoir :



a	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*	*c*
a	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*	*a*	*a*	*a*	*b*	*b*	*b*	*c*	*c*	*c*
a	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*	*a*	*b*	*c*
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1			1	1	1	1			1		
				2						2		2	2	2		2						2				
								3									3			3			3	3	3	3

Or, il ne manque qu'*une* partie au premier : donc toutes les assiettes où il y a un *a* sont pour lui : donc il y en a 19.

Il manque *deux* parties au second : donc toutes les assiettes où il y a deux *b* sont pour lui : donc il y en a 7.

Il manque *deux* parties au troisième; donc toutes les assiettes où il y a deux *c* sont pour lui; donc il y en a 7.

Si de là on concluoit qu'il faudroit donner à chacun suivant la proportion de 19, 7, 7, on se tromperoit trop grossièrement et je n'ai garde de croire que vous le fassiez ainsi; car il y a quelques faces

favorables au premier et au second tout ensemble, comme *abb*, car le premier y trouve un *a* qu'il lui faut, et le second deux *b* qui lui manquent; et ainsi *acc* est pour le premier et le troisième.

Donc il ne faut pas compter ces faces qui sont communes à deux comme valant la somme entière à chacun, mais seulement la moitié. Car, s'il arrivoit l'assiette *acc*, le premier et le troisième auroient même droit à la somme, ayant chacun leur compte, donc ils partageroient l'argent par la moitié; mais s'il arrive l'assiette *aab*, le premier gagne seul. Il faut donc faire la supputation ainsi :

Il y a 13 assiettes qui donnent l'entier au premier et 6 qui lui donnent la moitié et 8 qui ne lui valent rien : donc, si la somme entière est une pistole, il y a 13 faces qui lui valent chacune une pistole, il y a 6 faces qui lui valent chacune $\frac{1}{2}$ pistole et 8 qui ne valent rien.

Donc, en cas de parti, il faut multiplier

13 par une pistole,	qui font	13
6 par une demi,	qui font	3
8 par zéro,	qui font	0
Somme... 27	Somme...	16

et diviser la somme des valeurs, 16, par la somme des assiettes, 27, qui fait la fraction $\frac{16}{27}$, qui est ce qui appartient au premier en cas de parti, savoir 16 pistoles de 27.

Le parti du second et du troisième joueur se trouvera de même :

Il y a	4 assiettes qui lui valent 1 pistole : multipliez...	4
Il y a	3 assiettes qui lui valent $\frac{1}{2}$ pistole : multipliez...	$1\frac{1}{2}$
Et	20 assiettes qui ne lui valent rien...............	0
Somme...	27 Somme...	$5\frac{1}{2}$

Donc il appartient au second joueur 5 pistoles et $\frac{1}{2}$ sur 27, et autant au troisième, et ces trois sommes, $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$ et 16, étant jointes, font les 27.

5. Voilà, ce me semble, de quelle manière il faudroit faire les partis par les combinaisons suivant votre méthode, si ce n'est que vous ayez quelque autre chose sur ce sujet que je ne puis savoir. Mais, si je ne me trompe, ce parti est mal juste.

La raison en est qu'on suppose une chose fausse, qui est qu'on joue

en *trois* parties infailliblement, au lieu que la condition naturelle de ce jeu-là est qu'on ne joue que jusques à ce qu'un des joueurs ait atteint le nombre de parties qui lui manque, auquel cas le jeu cesse.

Ce n'est pas qu'il ne puisse arriver qu'on joue trois parties, mais il peut arriver aussi qu'on n'en jouera qu'une ou deux, et rien de nécessité.

Mais d'où vient, dira-t-on, qu'il n'est pas permis de faire en cette rencontre la même supposition feinte que quand il y avoit deux joueurs? En voici la raison :

Dans la condition véritable de ces trois joueurs, il n'y en a qu'un qui peut gagner, car la condition est que, dès qu'un a gagné, le jeu cesse. Mais, en la condition feinte, deux peuvent atteindre le nombre de leurs parties : savoir, si le premier en gagne une qui lui manque, et un des autres, deux qui lui manquent; car ils n'auront joué que trois parties, au lieu que, quand il n'y avoit que deux joueurs, la condition feinte et la véritable convenoient pour les avantages des joueurs en tout; et c'est ce qui met l'extrême différence entre la condition feinte et la véritable.

Que si les joueurs, se trouvant en l'état de l'hypothèse, c'est-à-dire s'il manque *une* partie au premier et *deux* au second et *deux* au troisième, veulent maintenant de gré à gré et conviennent de cette condition qu'on jouera *trois* parties complètes, et que ceux qui auront atteint le nombre qui leur manque prendront la somme entière, s'ils se trouvent seuls qui l'aient atteint, ou, s'il se trouve que deux l'aient atteint, qu'ils la partageront également, *en ce cas*, le parti se doit faire comme je viens de le donner, que le premier ait 16, le second $5\frac{1}{2}$, le troisième $5\frac{1}{2}$, de 27 pistoles, et cela porte sa démonstration de soi-même en supposant cette condition ainsi.

Mais s'ils jouent simplement à condition, non pas qu'on joue nécessairement trois parties, mais seulement jusques à ce que l'un d'entre eux ait atteint ses parties, et qu'alors le jeu cesse sans donner moyen à un autre d'y arriver, lors il appartient au premier 17 pistoles, au second 5, au troisième 5, de 27.

Et cela se trouve par ma méthode générale qui détermine aussi

qu'en la condition précédente, il en faut 16 au premier, $5\frac{1}{2}$ au second, et $5\frac{1}{2}$ au troisième, sans se servir des combinaisons, car elle va partout seule et sans obstacle.

6. Voilà, Monsieur, mes pensées sur ce sujet sur lequel je n'ai d'autre avantage sur vous que celui d'y avoir beaucoup plus médité; mais c'est peu de chose à votre égard, puisque vos premières vues sont plus pénétrantes que la longueur de mes efforts.

Je ne laisse pas de vous ouvrir mes raisons pour en attendre le jugement de vous. Je crois vous avoir fait connoître par là que la méthode des combinaisons est bonne entre deux joueurs par accident, comme elle l'est aussi quelquefois entre trois joueurs, comme quand il manque *une* partie à l'un, *une* à l'autre et *deux* à l'autre, parce qu'en ce cas le nombre des parties dans lesquelles le jeu sera achevé ne suffit pas pour en faire gagner deux; mais elle n'est pas générale et n'est bonne généralement qu'au cas seulement qu'on soit astreint à jouer un certain nombre de parties exactement.

De sorte que, comme vous n'aviez pas ma méthode quand vous m'avez proposé le parti de plusieurs joueurs, mais seulement celle des combinaisons, je crains que nous soyons de sentimens différens sur ce sujet.

Je vous supplie de me mander de quelle sorte vous procédez en la recherche de ce parti. Je recevrai votre réponse avec respect et avec joie, quand même votre sentiment me seroit contraire. Je suis etc.

LXXIII.

FERMAT A PASCAL ([1]).

SAMEDI 29 AOUT 1654.

(*OEuvres de Pascal*, IV, p. 435-437.)

Monsieur,

1. Nos coups fourrés continuent toujours et je suis aussi bien que

([1]) Cette lettre a été écrite par Fermat avant qu'il eût reçu la précédente.

vous dans l'admiration de quoi nos pensées s'ajustent si exactement qu'il semble qu'elles aient pris une même route et fait un même chemin. Vos derniers Traités du *Triangle arithmétique* et de *son application* en sont une preuve authentique : et si mon calcul ne me trompe, votre onzième conséquence [1] couroit la poste de Paris à Toulouse, pendant que ma proposition des nombres figurés, qui en effet est la même, alloit de Toulouse à Paris.

[1] La onzième conséquence du *Traité du triangle arithmétique* est énoncée ainsi : *Chaque cellule de la dividente est double de celle qui la précède dans son rang parallèle ou perpendiculaire.*

Pascal appelle *cellules de la dividente* celles que la bissectrice de l'angle droit du triangle traverse diagonalement : par exemple les cellules G, ψ, C, P, ρ.

G 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	ψ 2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	C 6	10	15	21	28	36		
1	4	10	P 20	35	56	84			
1	5	15	53	ρ 70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

La proposition des nombres figurés de Fermat est celle de l'*Observation XLVI sur Diophante* et de la lettre XII, **12** (*voir* plus haut, page 70, note 1). La onzième conséquence du *Traité du triangle arithmétique* de Pascal ne correspond de fait qu'à la première partie de la proposition de Fermat, à savoir que $m(m+1)$ est le double du triangle de côté m : pour retrouver dans l'œuvre de Pascal le reste de cette proposition, il faut, à la onzième conséquence, ajouter la douzième, etc., en mettant d'ailleurs celle-ci sous la forme de la proposition XI du *Traité des ordres numériques.*

Je n'ai garde de faillir tandis que je rencontrerai de cette sorte, et je suis persuadé que le vrai moyen pour s'empêcher de faillir est celui de concourir avec vous. Mais, si j'en disois davantage, la chose tiendroit du compliment, et nous avons banni cet ennemi des conversations douces et aisées.

Ce seroit maintenant à mon tour à vous débiter quelqu'une de mes inventions numériques; mais la fin du parlement augmente mes occupations, et j'ose espérer de votre bonté que vous m'accorderez un répit juste et quasi nécessaire.

2. Cependant je répondrai à votre question des trois joueurs qui jouent en deux parties. Lorsque le premier en a une, et que les autres n'en ont pas une, votre première solution est la vraie, et la division de l'argent doit se faire en 17, 5 et 5 : de quoi la raison est manifeste et se prend toujours du même principe, les combinaisons faisant voir d'abord que le premier a pour lui 17 hasards égaux, lorsque chacun des <deux> autres n'en a que 5.

3. Au reste, il n'est rien à l'avenir que je ne vous communique avec toute franchise. Songez cependant, si vous le trouvez à propos, à cette proposition :

Les puissances quarrées de 2, augmentées de l'unité, sont toujours des nombres premiers.

Le quarré de 2, augmenté de l'unité, fait 5 qui est nombre premier.

Le quarré du quarré fait 16 qui, augmenté de l'unité, fait 17, nombre premier.

Le quarré de 16 fait 256 qui, augmenté de l'unité, fait 257, nombre premier.

Le quarré de 256 fait 65 536 qui, augmenté de l'unité, fait 65 537, nombre premier.

Et ainsi à l'infini.

C'est une propriété de la vérité de laquelle je vous réponds. La démonstration en est très malaisée et je vous avoue que je n'ai pu

encore la trouver pleinement; je ne vous la proposerois pas pour la chercher, si j'en étois venu à bout (¹).

Cette proposition sert à l'invention des nombres qui sont à leurs parties aliquotes en raison donnée, sur quoi j'ai fait des découvertes considérables. Nous en parlerons une autre fois.

Je suis, Monsieur, votre, etc.,

FERMAT.

A Toulouse, le 29 août 1654.

LXXIV.

FERMAT A PASCAL (²).

VENDREDI 25 SEPTEMBRE 1654.

(*Œuvres de Pascal*, IV, p. 437-441.)

MONSIEUR,

1. N'appréhendez pas que notre convenance se démente, vous l'avez confirmée vous même en pensant la détruire, et il me semble qu'en répondant à M. de Roberval pour vous, vous avez aussi répondu pour moi.

Je prends l'exemple des trois joueurs, au premier desquels il manque une partie, et à chacun des deux autres deux, qui est le cas que vous m'opposez.

Je n'y trouve que 17 combinaisons pour le premier et 5 pour chacun des deux autres : car, quand vous dites que la combinaison *acc* est bonne pour le premier et pour le troisième, il semble que vous ne vous souveniez plus que tout ce qui se fait après que l'un des joueurs a gagné, ne sert plus de rien. Or, cette combinaison ayant fait gagner le premier dès la première partie, qu'importe que le troisième en

(¹) *Voir* Tome I, p. 131, et Tome II, p. 206.
(²) Réponse à la lettre LXXII.

gagne deux ensuite, puisque, quand il en gagneroit trente, tout cela seroit superflu?

Ce qui vient de ce que, comme vous avez très bien remarqué, cette fiction d'étendre le jeu à un certain nombre de parties ne sert qu'à faciliter la règle et (suivant mon sentiment) à rendre tous les hasards égaux, ou bien, plus intelligiblement, à réduire toutes les fractions à une même dénomination.

Et afin que vous n'en doutiez plus, si au lieu de *trois* parties, vous étendez, au cas proposé, la feinte jusqu'à *quatre*, il y aura non seulement 27 combinaisons, mais 81, et il faudra voir combien de combinaisons feront gagner au premier une partie plus tôt que deux à chacun des autres, et combien feront gagner à chacun des deux autres deux parties plus tôt qu'une au premier. Vous trouverez que les combinaisons pour le gain du premier seront 51 et celles de chacun des autres deux 15, ce qui revient à la même raison.

Que si vous prenez cinq parties ou tel autre nombre qu'il vous plaira, vous trouverez toujours trois nombres en proportion de 17, 5, 5.

Et ainsi j'ai droit de dire que la combinaison *acc* n'est que pour le premier et non pour le troisième, et que *cca* n'est que pour le troisième et non pour le premier, et que partant ma règle des combinaisons est la même en trois joueurs qu'en deux, et généralement en tous nombres.

2. Vous aviez déjà pu voir par ma précédente (1) que je n'hésitois point à la solution véritable de la question des trois joueurs dont je vous avois envoyé les trois nombres décisifs, 17, 5, 5. Mais parce que M. < de > Roberval sera peut-être bien aise de voir une solution sans rien feindre, et qu'elle peut quelquefois produire des abrégés en beaucoup de cas, la voici en l'exemple proposé :

Le premier peut gagner, ou en une seule partie, ou en deux, ou en trois.

(1) Lettre LXXIII, **2**.

S'il gagne en une seule partie, il faut qu'avec un dé qui a trois faces, il rencontre la favorable du premier coup. Un seul dé produit trois hasards : ce joueur a donc pour lui $\frac{1}{3}$ des hasards, lorsqu'on ne joue qu'une partie.

Si on en joue deux, il peut gagner de deux façons, ou lorsque le second joueur gagne la première et lui la seconde, ou lorsque le troisième gagne la première et lui la seconde. Or, deux dés produisent 9 hasards : ce joueur a donc pour lui $\frac{2}{9}$ des hasards, lorsqu'on joue deux parties.

Si on en joue trois, il ne peut gagner que de deux façons, ou lorsque le second gagne la première, le troisième la seconde et lui la troisième, ou lorsque le troisième gagne la première, le second la seconde et lui la troisième; car, si le second ou le troisième joueur gagnoit les deux premières, il gagneroit le jeu, et non pas le premier joueur. Or, trois dés ont 27 hasards : donc ce premier joueur a $\frac{2}{27}$ des hasards lorsqu'on joue trois parties.

La somme des hasards qui font gagner ce premier joueur est par conséquent $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{9}$ et $\frac{2}{27}$, ce qui fait en tout $\frac{17}{27}$.

Et la règle est bonne et générale en tous les cas, de sorte que, sans recourir à la feinte, les combinaisons véritables en chaque nombre des parties portent leur solution et font voir ce que j'ai dit au commencement, que l'extension à un certain nombre de parties n'est autre chose que la réduction de diverses fractions à une même dénomination. Voilà en peu de mots tout le mystère, qui nous remettra sans doute en bonne intelligence, puisque nous ne cherchons l'un et autre que la raison et la vérité.

3. J'espère vous envoyer à la Saint-Martin un Abrégé de tout ce que j'ai inventé de considérable aux nombres. Vous me permettrez d'être concis et de me faire entendre seulement à un homme qui comprend tout à demi-mot.

Ce que vous y trouverez de plus important regarde la proposition

que tout nombre est composé d'un, de deux ou de trois triangles; d'un, de deux, de trois ou de quatre quarrés; d'un, de deux, de trois, de quatre ou de cinq pentagones; d'un, de deux, de trois, de quatre, de cinq ou de six hexagones, et à l'infini ([1]).

Pour y parvenir, il faut démontrer que tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple de 4, est composé de deux quarrés, comme 5, 13, 17, 29, 37, etc.

Étant donné un nombre premier de cette nature, comme 53, trouver, par règle générale, les deux quarrés qui le composent.

Tout nombre premier, qui surpasse de l'unité un multiple de 3, est composé d'un quarré et du triple d'un autre quarré, comme 7, 13, 19, 31, 37, etc.

Tout nombre premier, qui surpasse de 1 ou de 3 un multiple de 8, est composé d'un quarré et du double d'un autre quarré, comme 11, 17, 19, 41, 43, etc.

Il n'y a aucun triangle en nombres duquel l'aire soit égale à un nombre quarré ([2]).

Cela sera suivi de l'invention de beaucoup de propositions que Bachet avoue avoir ignorées, et qui manquent dans le Diophante.

Je suis persuadé que dès que vous aurez connu ma façon de démontrer en cette nature de propositions, elle vous paroîtra belle et vous donnera lieu de faire beaucoup de nouvelles découvertes; car il faut, comme vous savez, que *multi pertranseant ut augeatur scientia* ([3]).

S'il me reste du temps, nous parlerons ensuite des nombres magiques, et je rappellerai mes vieilles espèces sur ce sujet.

Je suis de tout mon cœur, Monsieur, votre, etc.,

FERMAT.

Ce 25 septembre.

Je souhaite la santé de M. de Carcavi comme la mienne et suis tout à lui.

([1]) *Voir* Lettre XII, 3.
([2]) *Voir* Lettre XII, 2.
([3]) *Voir* plus haut p. 35, note 2.

Je vous écris de la campagne, et c'est ce qui retardera par aventure mes réponses pendant ces vacations.

LXXV.

PASCAL A FERMAT (1).

MARDI 27 OCTOBRE 1654.

(*Œuvres de Pascal*, IV, p. 443.)

MONSIEUR,

Votre dernière lettre m'a parfaitement satisfait. J'admire votre méthode pour les partis, d'autant mieux que je l'entends fort bien; elle est entièrement vôtre, et n'a rien de commun avec la mienne, et arrive au même but facilement. Voilà notre intelligence rétablie.

Mais, Monsieur, si j'ai concouru avec vous en cela, cherchez ailleurs qui vous suive dans vos inventions numériques, dont vous m'avez fait la grâce de m'envoyer les énonciations. Pour moi, je vous confesse que cela me passe de bien loin; je ne suis capable que de les admirer, et vous supplie très humblement d'occuper votre premier loisir à les achever. Tous nos Messieurs les virent samedi dernier et les estimèrent de tout leur cœur : on ne peut pas aisément supporter l'attente de choses si belles et si souhaitables. Pensez-y donc, s'il vous plaît, et assurez-vous que je suis, etc.

PASCAL.

Paris, 27 octobre 1654.

(1) Réponse à la Lettre précédente.

ANNÉE 1656.

LXXVI.

FERMAT A CARCAVI (¹).

1656.

(Bibl. Nat. fr. 20945, XVII, p. 78-84.)

< MONSIEUR >,

1. J'ai reçu un très grand contentement de vos lettres du 19 du mois passé, lesquelles m'ont été rendues il y a deux jours, et je me tiens fort obligé à la civilité de M. Pascal, duquel, si l'estime que j'en ai pouvoit être plus grande, elle seroit augmentée par tant de démonstrations que j'en ai reçues. Je vous prie donc (vous qui m'avez fait l'honneur de me faire connoître une personne si savânte) de lui témoigner le respect et l'estime que j'ai pour lui, et que, si je ne puis pas correspondre avec les effets à tant de grâces qu'il lui a plu de me faire, je ne manquerai pas au moins d'y satisfaire avec ma bonne volonté que j'ai voulu vous faire connoître présentement par la réponse que je vous envoie de ce qu'on m'a proposé. Le temps est court; mais, n'espérant pas de pouvoir la semaine prochaine avoir la commodité de m'appliquer à de semblables spéculations, je suis contraint de vous en dire mon sentiment sur le champ.

2. Il est bien vrai qu'il me déplaît que d'abord je ne suis pas du sentiment de M. Pascal touchant l'*Analyse speciose*, de laquelle je fais plus grand cas

(¹) Cette lettre a été publiée pour la première fois par M. Charles Henry (*Recherches*, p. 197-200) d'après une copie sans date, sans adresse et sans signature. La date de 1656 a été attribuée à cette lettre à cause des allusions aux jansénistes et molinistes, et au séjour de Huygens à Paris que le savant hollandais quitta le 30 novembre 1655 (*Œuvres complètes*, I, p. 367). Le texte n'est qu'une traduction passablement incorrecte de l'original qui était rédigé en latin, comme on peut le conclure d'après les nombreux mots de cette langue que le traducteur, parfois embarrassé, a transcrits dans l'interligne.

que lui, et j'ose dire que les preuves que j'en ai sont si grandes que non seulement elles me persuadent, mais elles m'obligent d'en faire une estime bien grande. J'avoue que le retour en est bien souvent difficile; mais, parce que, quand j'ai fait exactement l'analyse, je suis aussi sûr de la solution du problème comme si je l'eusse démontré par synthèse, je ne me soucie pas quelquefois d'en chercher la construction la plus aisée, me persuadant ce qu'en une autre occasion M. Pascal [1] dit : *non esse par labori præmium*. Mais, en cela comme en toutes autres choses, je laisse volontiers que chacun suive son propre sentiment.

3. Je viens au problème des < cercles > tangens dont on désire une plus grande explication. Aussitôt que vous me l'envoyâtes, il me souvint que j'avois songé à cette matière en cherchant le *lieu que décriroit le centre d'un cercle qui toucheroit deux autres cercles donnés, ou un cercle donné et une ligne donnée, etc.*, et que j'avois démontré que, quand deux cercles sont égaux < et qu' > ils se doivent toucher avec un autre cercle qui les enferme ou qui les exclut tous deux, le lieu est la ligne droite qui les divise également et qu'elle est perpendiculaire à la ligne qui unit les centres des cercles donnés; mais, quand ils sont inégaux et qu'il faut qu'ils se touchent comme ici-dessus, alors le lieu est hyperbole ou, pour mieux dire, il est les sections opposées, les foyers desquelles sont les centres des cercles donnés et le côté transvers égal à la différence des semidiamètres des dits cercles.

Or, dans le cas dans lequel il faudra inclure l'un et exclure l'autre en le touchant, les sections opposées ont les foyers comme auparavant, mais le côté transvers est l'aggrégé et non pas la différence des semidiamètres.

Je passe les autres problèmes que j'ai démontrés en cette matière, parce qu'ils ne sont pas à propos pour nous; mais je dirai seulement en passant que, quand les donnés sont un cercle et une ligne droite qui le coupe, le lieu est à deux paraboles qui ont toutes deux pour foyer le centre du cercle donné et passent par les intersections du dit cercle et de la ligne donnée.

Ainsi, en recevant vos lettres, je m'aperçus qu'en laissant une détermination dans le problème de M. Pascal [2], il se feroit local, en la manière ici-dessous :

Étant donné un cercle et une ligne, trouver un autre cercle qui, touchant

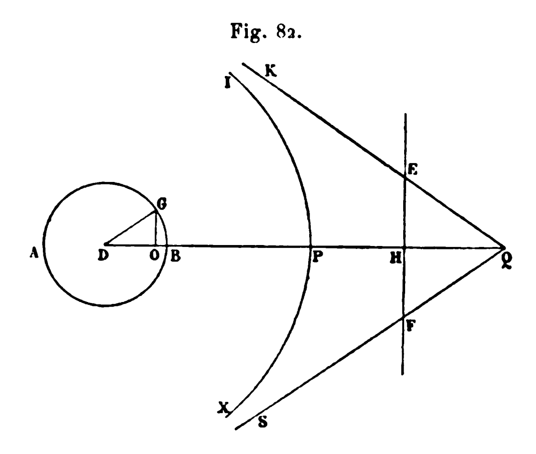
[1] Dans les écrits connus de Pascal, on ne trouve guère qu'une expression analogue : *ad illa, quæ plus afferunt fructus quam laboris, vergentes*, mots qui terminent le *De numericis ordinibus tractatus*.

[2] *Comp.* Lettre LXX, 9.

le donné, soit coupé par la ligne en sorte que le segment soit capable d'un angle donné.

Soit le cercle ABG (*fig.* 82) donné, la ligne <EF, le> centre D; soit la perpendiculaire DBH et qu'on fasse l'angle HDG égal à l'angle donné. Menant GO perpendiculaire, que ci-après on coupe BH en P dans la raison GD à DO, et qu'on prolonge la ligne DH en Q en sorte que la raison DO à HQ soit la même que celle du quarré GO au quarré GD avec le rectangle HDO.

Fig. 82.



Qu'après, par le point Q, on tire les angles HQK, HQS égaux à l'angle donné, et que par le point P, autour des asymptotes QS, QK, on décrive l'hyperbole IPX.

Je dis qu'elle satisfera à la proposition, c'est-à-dire que le cercle quelconque qui, ayant son centre sur ladite hyperbole, touchera le cercle donné, sera aussi coupé par la ligne donnée en sorte que son segment soit capable de l'angle GDO. Mais cela, on ne le doit entendre qu'en cas que l'angle donné soit aigu, puisque, s'il est droit, le lieu est la ligne droite <donnée>, comme il est clair, et que, s'il est obtus, le lieu est aussi une hyperbole, mais il y a alors quelque peu de mutation dans la construction. — Mais il n'est pas nécessaire de dire tous les détails.

Cela étant supposé, on peut facilement résoudre le problème par les lieux solides en cas quelconque, c'est à dire en décrivant cette dernière hyperbole et les autres sections opposées dont j'ai parlé ici-dessus, puisque leur intersection donnera toujours le centre du cercle qu'on cherche.

Mais, parce que le problème est plan et craignant le scrupule des géomètres, je l'ai résolu alors par les lieux plans généralement; mais, parce que je m'aperçus que la construction en étoit beaucoup embrouillée, je choisis

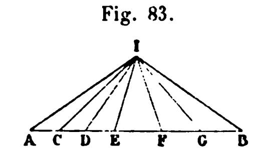
au plus facile les donnés et je les appliquai en nombres; et c'est tout ce que je vous envoyai alors et je ne vous enverrai autre chose, parce que le susdit Monsieur ne veut pas la solution simplement analytique, mais qu'il veut aussi une construction gentille et facile, laquelle je n'ai pas pour à cette heure le loisir de la chercher.

4. Pour ce qui est de l'autre < problème > de cinq lignes données ([1]), je ne sais pas qui lui a dit que je l'estime facile. Je ne crois pas vous avoir écrit une telle chose, puisque je m'aperçus alors qu'on pouvoit venir difficilement à l'équation et qu'après qu'on l'auroit trouvée, la construction en seroit beaucoup embrouillée. Vous me ferez la faveur de le dire à M. Pascal et je songerai à cela quand j'aurai plus de loisir.

5. Je viens au problème *de minimis* avec lequel le dit Monsieur dit qu'il a résolu plusieurs autres problèmes. C'est ce que je crois facilement, parce que ma méthode s'étend aux mêmes et m'apprend que le plus souvent en ces problèmes le point du minime est centre du cercle ou de la sphère qui satisfait à ce qu'on propose. Je dis *le plus souvent,* parce que je n'ai pas le loisir de les examiner tous et je suis certain qu'en celui-ci, dont M. Pascal ne parle point, bien qu'il soit local *ad circulum,* le point du minime n'est pas le centre du cercle :

Étant donné quelconque nombre de points en une ligne droite, comme A, C, D, E, F, G, B (*fig.* 83), *trouver un autre comme* I, *duquel menant les lignes* IA, IC, ID, IE, IF, IG, IB, *l'assemblage des quarrés des dites lignes ait au triangle* AIB *la raison minime de toutes les possibles.*

Fig. 83.



C'est à quoi je voudrois prier M. Pascal de me faire la faveur d'appliquer sa méthode.

6. Après, < pour > le lieu du problème duquel il dit que dépendent tous les lieux plans proposés par lui, je n'ai pas voulu manquer de le chercher et aussitôt j'ai trouvé que c'était un cercle, en la manière ci-dessous :

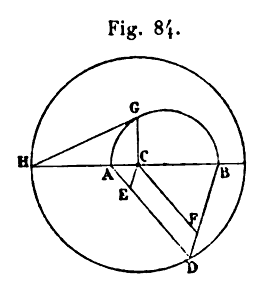
Soit donnée la ligne droite AB (*fig.* 84) *coupée* utcumque *en* C *et qu'il*

(1) Peut-être un problème ayant rapport à l'*hexagramme* de Pascal.

faille trouver le lieu sur lequel étant pris le point D, *et étant tirées les lignes* DA, DB *et les parallèles* CE, CF, *les rectangles* ADE, BDF *pris ensemble soient égaux au quarré de la ligne donnée* Z.

Qu'on décrive sur la ligne AB le demi-cercle AGB et qu'après, élevant la perpendiculaire CG, on tire la ligne GH égale à la ligne Z et terminée à la ligne AB allongée s'il le faut. Je dis que, si du centre C, avec la distance CH, on décrit le cercle HD, il sera le lieu qu'on cherche.

Fig. 84.



Vous pouvez proposer à M. Pascal, avec les mêmes données, de *trouver le point* D, *en sorte que les deux rectangles* DAE, DBF *soient égaux au quarré de la < ligne >* Z *donnée :* c'est ce que j'ai trouvé en un même temps.

7. J'ai cherché le lieu de cet autre : *Étant donnés autant de cercles qu'on voudra et une ligne droite, trouver un point duquel menant des tangentes aux cercles donnés et une perpendiculaire à la ligne donnée, les quarrés des tangentes aient à la perpendiculaire une raison donnée*, et j'ai trouvé qu'il peut être ellipse, parabole ou hyperbole selon la diversité des données. Mais il seroit trop long d'écrire tout, car il faudroit faire un livre et non pas une lettre; je mettrai ici seulement pour essai la détermination qui est que, toutes les fois que la raison donnée sera la même que la raison du nombre des cercles donnés à l'unité, le lieu sera parabole; si elle est plus petite, il sera ellipse, et si elle est plus grande, il sera hyperbole.

8. Le *porisme* des anciens à la description des sections coniques me semble très joli, mais je n'ai pas le loisir de les examiner pour à cette heure; je conserverai le tout pour un meilleur temps, comme aussi de vous parler des quarrés que ces Messieurs appellent *magiques*, desquels M. Pascal fait quelque mention dans sa lettre.

9. J'y ajoute seulement que vous dites le vrai quand vous dites qu'il vous souvient que je vous ai parlé autrefois des *deux moyennes*, parce qu'il y a longtemps que j'ai trouvé la méthode de les trouver en une infinité de

façons (j'entends par les lieux solides); mais, entre tous, ceux là m'ont plu davantage qui résolvent le problème *per circulum et ellipsim :* c'est ce que je vous prie de proposer à M. Pascal pour savoir s'il lui est peut-être arrivé tout de même.

10. Je vous prie de me donner quelques nouvelles des jansénistes et molinistes, comme aussi quelque objection qu'on fait à M. Descartes; et je voudrois savoir en quel estime M. Hugenius, gentilhomme hollandois, est auprès de ces Messieurs. Il a imprimé plusieurs petits livres de Géométrie ([1]) et il a demeuré quelque temps à Paris.

LXXVII.

FERMAT A CARCAVI ([2]).

JUIN 1656.

(*Corresp. Huyg.*, n° 301.)

.... **1.** Si A et B jouent avec deux dés en sorte que, si A amène 6 points en ses deux dés avant que B en amène 7, le joueur A gagne et, si B amène 7 avant que A ait amené <6>, le joueur B aura gagné, et de plus le joueur A a la primauté, l'avantage de A à B est comme 30 à 31.

([1]) Christiani Hugenii, Const. F., Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro, quibus subjuncta est 'Εξέτασις Cyclometriæ Cl. viri Gregorii a S. Vincentio editæ anno CIↃ IↃ CXLVII, Lugd. Batavorum, 1651, 4°. — De circuli magnitudine inventa : accedunt ejusdem Problematum quorundam illustrium constructiones. Lugd. Batavorum, 1654, 4°.

([2]) Cette pièce est un extrait adressé par Carcavi à Huygens. Dans la lettre d'envoi, du 22 juin 1656, Carcavi écrivait (*Corresp. Huyg.*, n° 300) :

« M. de Fermat m'a envoyé, il y a déjà quelques jours, la solution de ce que vous aviez » proposé touchant le parti des jeux, et vous verrez par l'extrait que je vous fais de sa » lettre qu'il a la démonstration générale de ces sortes de questions, et conclurez certai- » nement avec nous, non seulement pour la résolution de ce problème, mais aussi pour » quantité de plusieurs autres très belles spéculations que nous avons vu de lui, tant » en ce qui concerne les nombres que pour la géométrie, que c'est un des plus grands » génies de notre siècle. Je tâche, il y a déjà longtemps, d'en tirer ce que je puis pour le

2. Si le joueur A a la première fois la primauté et ensuite le joueur B ait aussi la primauté la seconde fois, et ainsi alternativement (auquel cas A poussera le dé la première fois, et puis B deux fois de suite, et puis A deux fois de suite, et ainsi jusques à la fin), en cette espèce le parti du joueur A est à celui du joueur B comme 10355 à 12276.

3. Que si le joueur A joue premièrement deux fois et le joueur B trois fois, puis le joueur A deux fois et ensuite le joueur B trois fois, et ainsi à l'infini que le joueur A qui commence ne joue jamais que deux coups et que le joueur B en joue trois (supposant toujours que A cherche à ramener 6 et B 7), le parti de A à B est comme 72360 à 87451.

4. Les questions diversifient et la méthode change au jeu de cartes. Par exemple, je propose :

Si trois joueurs A, B, C parient avec 52 cartes (qui est le nombre d'un jeu complet) que celui qui aura plus tôt un cœur gagnera, en supposant que A prend la 1re carte, B la 2e et C la 3e, et que ce même ordre est toujours gardé jusques à ce que l'un ait gagné;

5. Si deux joueurs jouent à prime (1) avec 40 cartes, l'un entreprend de ramener prime dans les quatre premières cartes qui lui

» donner au public et j'en avois fait la proposition à M. de Schooten pour y employer les » Elzevirs, mais les choses ne se trouvèrent pas disposées pour nous procurer cette » satisfaction. »

« En ce qui concerne Messieurs Pascal et Desargues, ... le premier avoit déjà trouvé la solution de votre proposition et me doit donner au premier jour celle de toutes les autres qui sont dans l'extrait de cette lettre de M. de Fermat. » ....

La question posée par Huygens est la dernière de son Traité *De ratiociniis in ludo aleæ* qu'il venait de terminer en brouillon et d'envoyer (le 6 mai 1656) à Schooten pour que ce dernier en achevât la mise en latin. Elle est ainsi conçue :

Propositio XIV. — *Si ego et alius duabus tesseris alternatim jaciamus hac conditione ut ego vincam simul atque septenarium jaciam, ille vero quam primum senarium jaciat, ita videlicet ut ipsi primum jactum concedam, invenire rationem meæ ad ipsius sortem.* (Fr. a Schooten, *Exercitationum mathematicarum* liber V, continens sectiones triginta miscellaneas. Lugd. Batavorum, 1657, in-4°, p. 533.)

(1) *Voir* ci-après, LXXVII *bis*, **6**.

seront baillées et l'autre parie que le premier ne réussira pas, quel est leur parti?

6. Toutes ces questions ont des méthodes et des règles différentes. Si on n'en peut venir à bout, je vous les expliquerai toutes avec leurs démonstrations; la plus subtile et la plus malaisée est celle du vrai parti de celui qui tient le dé au jeu de la chance contre les autres ([1]).

7. Soit encore, si vous voulez, deux joueurs qui jouent au piquet: le premier entreprend d'avoir trois as en ses douze premières cartes; quel est le parti de celui-ci contre l'autre qui parie qu'il n'aura point les trois as?

LXXVII *bis*.

HUYGENS A CARCAVI ([2]).

JEUDI 6 JUILLET 1656.

(*Corresp. de Huygens*, n° 308.)

.... 1. J'ay veu par la solution que Monsieur de Fermat a faite de mon Probleme ([3]) qu'il a la methode universelle pour trouver tout ce qui appartient à cette matiere, ce que je desirois seulement de sçavoir en la proposant. La mesme raison de 30 à 31 est dans le traité que j'ay envoyé à Monsieur Schoten il y a 2 mois : dans le mesme il y a aussi un Theoreme duquel je me sers dans toutes ces questions des parti du jeu; et je le mettray icy, parce qu'autrement je ne pourrois pas vous faire voir que je suis venu à bout des Problemes que Monsieur de Fermat a proposez, le calcul de quelques uns d'entre iceux estant si long que je n'ay pas assez de patience pour en rechercher le dernier

([1]) Il s'agit probablement de la question exposée Lettre LXXVIII, 3.

([2]) Extrait communiqué à Fermat et à Pascal (*voir* ci-après LXXVIII, 1) et répondant à la pièce précédente, LXXVII.

([3]) *Voir* Pièce LXXVII, 1.

produit; c'est pourquoy dans ceux la, apres vous avoir expliqué le dit theoreme, je me contenteray de mettre la methode par laquelle l'on y peut parvenir.

2. Le Theoreme est cettui-cy :

Si le nombre des hazards qu'on a pour avoir b soit p, et le nombre des hazards qu'on a pour avoir c soit q, cela vaut autant que si l'on avait $\frac{bp+cq}{p+q}$.

Par exemple si j'avois 2 hazards pour avoir $\frac{1}{3}$ de ce qui est mis au jeu et 5 hazards pour en avoir $\frac{1}{2}$, je multiplie $\frac{1}{3}$ par 2 et $\frac{1}{2}$ par 5. Puis j'adjouste ensemble les produits qui sont $\frac{2}{3}$ et $\frac{5}{2}$; la somme est $\frac{19}{6}$, laquelle je divise par 5 + 2, c'est 7; dont j'ay $\frac{19}{42}$. Je dis qu'il m'appartient $\frac{19}{42}$ de ce qui est mis au jeu.

3. La premiere des questions de Monsieur de Fermat [1] est telle : A et B jouent à 2 dez. A gaignera en amenant 6 points. B gaignera en amenant 7 points. A poussera le dé la première fois, et puis B deux fois de suite et puis A deux fois de suite, et ainsi jusques à ce que l'un ou l'autre ait gaigné.

Pour faire les partis je nommeray d ce qui est mis au jeu, et je mettray x pour la part qui en appartient au joueur A.

Or il est evident que, quand A aura fait le premier coup et B ses deux coups de suite, et encore A l'un de ses deux coups, sans que ny l'un ny l'autre ait rencontré, que alors A aura derechef la mesme apparence pour gaigner qu'il avoit des le commencement, et que par consequent il luy appartiendra derechef la mesme part de ce qui est mis au jeu, c'est à dire x.

Partant, lorsque A vient à faire le premier de ses deux coups de suite, il aura

5 hazards pour avoir d,
et 31 hazards pour avoir x,

[1] Pièce LXXVII, 2.

car de 36 divers coups que produisent 2 dez, il y en a 5 de 6 points, c'est à dire qui luy donnent d ou ce qui est mis au jeu, et 31 qui luy font manquer les 6 points, et ainsi luy donnent x, le mettant en estat d'avoir encore un coup à faire devant que le tour de B soit venu. Mais

$$\left.\begin{array}{l}\text{5 hazards pour avoir } d\\ \text{et 31 hazards pour avoir } x\end{array}\right\}$$ valent autant par le theoreme precedent que $\frac{5d+31x}{36}$. Cecy est donc la part de A lorsque A fait le premier de ses deux coups de suite.

Le coup d'auparavant c'est quand B fait le dernier de ses deux coups, et parce qu'il gaigne en amenant 7 points lesquels se rencontrent en 6 façons différentes et qu'alors A perd, donques à ce coup A aura

6 hazards pour avoir o ou rien,

et 30 hazards pour avoir $\frac{5d+31x}{36}$,

car son tour sera venu de faire deux coups de suite; lesquels hazards par le précédent théorème valent $\frac{150d+930x}{1296}$. Cecy est donc la part de A, lorsque B fait le dernier de ses 2 coups de suite.

Quand donc B fait le premier de ses 2 coups, A aura

6 hazards pour avoir o,

30 hazards pour < avoir > $\frac{150d+930x}{1296}$,

ce qui vaut $\frac{4500d+27900x}{46656}$.

Quand donc A fait le premier coup de tous, A aura

5 hazards pour avoir d,

31 hazards pour avoir $\frac{4500d+27900x}{46656}$,

ce qui vaut $\frac{372780d+864900x}{1679616}$.

Cecy est donc égal à x, et partant x égal à $\frac{10355}{22631}$ < d >.

Le parti du joueur A est donc $\frac{10355}{22631}$ de ce qui est mis au jeu, et le

reste $\frac{12276}{22631}$ est le party de B, et l'un est à l'autre comme $\frac{10355}{12276}$, qui sont les mesmes nombres de Monsieur de Fermat.

4. Dans la seconde question ([1]) où il suppose que le joueur A joue premierement deux fois, et puis le joueur B trois fois et ensuite le joueur A < deux fois et puis le joueur B > trois fois, la methode est tout à fait semblable, et j'y trouve aussi les mesmes nombres que Monsieur de Fermat, mais qu'il les faut transposer : c'est-à-dire que le party de A est à celui de B comme 87451 à 72360, au lieu qu'il a mis 72360 à 87451.

5. La troisieme est ([2]) quand trois joueurs A, B et C parient avec toutes les 52 cartes que celuy qui aura plus tost un cœur gaignera, et que l'on suppose que A prend la premiere carte, B la seconde, C la troisieme et ainsi consecutivement jusques à ce que l'un ait gaigné.

Il y a 13 cœurs parmy ces 52 cartes, c'est pourquoy s'il arrivoit que toutes les autres 39 fussent prises selon le dit ordre sans que personne eust rencontré un cœur, alors ce seroit le tour du joueur A de prendre et il auroit gaigné asseurement. Quand donc C prend la trente-neuvieme carte, au cas que jusques là personne n'ait rencontré, il est certain que A aura 13 hazards pour avoir perdu et 1 hazard pour avoir tout ce qui est mis au jeu, que j'appelleray d comme devant. Or, d'avoir

13 hazards pour avoir o,
et 1 hazard pour avoir d,

cela vaut $\frac{1d}{14}$ par nostre theoreme; d'icy je cognois que, quand B prend la trente-huitieme carte, A aura

13 hazards pour avoir o,
et 2 hazards pour avoir $\frac{1}{14}d$

([1]) Pièce LXXVII, 3.
([2]) Pièce LXXVII, 4.

(c'est quand B manque de rencontrer un cœur, car alors c'est à C de prendre la trente-neuvieme); lesquels hazards valent $\frac{1}{105}d$.

Quand A prend la trente-septieme, A aura donc

13 hazards pour avoir d,
et 3 hazards pour avoir $\frac{1d}{105}$,

ce qui vaut $\frac{1368}{1680}d$.

Ainsi en reculant tousjours d'une carte l'on sçaura à la fin la part de A, lorsqu'il prend la premiere de toutes, et de la mesme maniere se trouvera le party de B, et le reste sera celuy de C.

6. La quatrieme est ([1]) quand deux joueurs jouent à la prime avec 40 cartes et que le joueur A entreprend de ramener prime, et B parie que A ne reussira pas dans les quatre premieres cartes. L'on m'a dit que d'avoir prime c'est avoir 4 cartes differentes, à sçavoir une de chasque sorte. Je trouve donc que le party de A est à celui de B comme 1000 à 8139, de sorte que l'on peut bien parier 8 contre 1 que quelqu'un n'amesnera pas prime.

7. La cinquieme et derniere question ([2]) est quand deux joueurs jouent au piquet et que le premier entreprend d'avoir 3 as dans ses douze premieres cartes et que l'autre parie qu'il ne les aura pas. Pour resoudre celle-cy, je supposeray qu'il prend ses 12 cartes une à une, car il n'importe aucunement. S'il arrive donc que celuy qui l'entreprend ayant pris 11 cartes ait desja rencontré 2 as, il y aura parmi les 25 cartes qui restent encore 2 as, et partant il aura en ce cas 2 hazards pour avoir gaigné, c'est pour avoir d, et 23 hazards pour avoir o, c'est à dire pour perdre : ce qui vaut $\frac{2}{25}d$.

([1]) Pièce LXXVII, 5.
([2]) Pièce LXXVII, 7.

Quand il a pris 10 cartes, s'il a rencontré 2 as, il aura donc

2 hazards pour avoir d,

et 24 hazards pour avoir $\frac{2}{25}d$, c'est pour avoir seulement 2 as en 11 cartes;

lesquels hazards valent $\frac{49}{325}d$.

Mais quand il a pris 10 cartes, s'il n'a encore que 1 as, il y aura parmy les 26 restantes 3 as; c'est pourquoy alors il aura

3 hazards pour avoir $\frac{2}{25}d$, c'est pour avoir 2 as en 11 cartes,

et 23 hazards pour avoir o, c'est pour avoir 1 as en 11 cartes,

car avec cecy il ne sçauroit gagner; lesquels hazards valent $\frac{3}{325}d$.

Quand il a pris 9 cartes, s'il a 2 as, il aura

2 hazards pour avoir d,

et 25 hazards pour avoir $\frac{49}{325}d$, c'est pour avoir seulement 2 as en 10 cartes,

lesquels hazards valent $\frac{1875}{8775}d$.

Mais ayant pris 9 cartes, s'il n'a encore qu'1 as, il aura

3 hazards pour avoir $\frac{49}{325}d$, c'est 2 as en 10 cartes,

et 24 hazards pour avoir $\frac{3}{325}d$, c'est 1 as en 10 cartes,

ce qui vaut $\frac{219}{8775}d$.

Et enfin si parmi ses 9 cartes il n'a encore aucun as, il aura

4 hazards pour avoir $\frac{3}{325}d$, c'est 1 as en 10 cartes,

et 23 hazards pour avoir o, c'est pas 1 as en 10 cartes,
car alors il ne sçauroit gaigner,

lesquels hazards valent $\frac{12}{8775}d$.

Ainsi par cette méthode en reculant tousjours d'une carte je sçau-

ray à la fin la part du joueur A, lorsqu'il n'a encore pris aucune carte et que par consequent il n'a pas encore 1 as : laquelle ayant ostée de d, le reste sera la part du joueur B. Ce qu'il falloit trouver.

8. Si j'estois bien informé de l'estat de la question au jeu de la chance que Monsieur de Fermat dit estre la plus malaisée ([1]), j'essayerois aussi de la resoudre. Pour celles que je viens de traiter, je vous prie, Monsieur, de me faire la faveur de les communiquer à Monsieur Milon, et que je puisse sçavoir si ce que Messieurs de Fermat et Pascal en auront trouvé sera conforme à ce que j'en explique. Je desire aussi fort de sçavoir s'ils ne se servent pas du mesme theoreme que moy.

. . . .

LXXVIII.

CARCAVI A HUYGENS ([2]).

JEUDI 28 SEPTEMBRE 1656.

(*Corresp. Huyg.*, n° 336.)

Monsieur,

1. Il y a déjà longtemps que j'ai fait voir à Messieurs de Fermat et Pascal ce que vous aviez pris la peine d'envoyer à M. Mylon et à moi touchant les partis ([3]), mais je n'ai pu me donner l'honneur de vous faire réponse, la chose n'ayant pas dépendu absolument de moi et la commodité de ces Messieurs ne s'étant pas toujours rencontrée avec le desir que j'avois de vous satisfaire.

M. Pascal se sert du même principe que vous et voici comme il l'énonce :

S'il y a tel nombre de hasards qu'on voudra, comme par exemple 10

([1]) Pièce LXXVII, 6.
([2]) Publiée pour la première fois par M. Charles Henry (*Pierre de Carcavy*, p. 18).
([3]) *Voir* la Lettre précédente.

qui donnent chacun 3 pistoles et qu'il y en ait 2 qui donnent chacun 4 pistoles, et qu'il y en ait 3 qui ôtent chacun 3 pistoles, il faut ajouter toutes les sommes ensemble et les hasards ensemble, et diviser l'un par l'autre. Le quotient est le requis, ce qui revient à une même énonciation que la vôtre.

2. Mais il ne voit pas comment cette règle peut s'appliquer à l'exemple suivant :

Si on joue en six parties, par exemple du piquet, une certaine somme et qu'un des joueurs ait deux, trois ou quatre parties et que l'on veuille quitter le jeu, quel parti il faut faire quand un a une partie à point, ou deux ou trois etc. à point, ou bien quand un a deux parties et l'autre une, etc.?

Et le dit S^r Pascal n'a trouvé la règle que lorsqu'un des joueurs a une partie à point ou quand il en a deux à point (lorsque l'on joue en plusieurs parties), mais il n'a pas la règle générale. Voici son énonciation (¹) :

Il appartient à celui qui a la première partie de tant qu'on voudra, par exemple de six, sur l'argent du perdant, le produit d'autant de premiers nombres pairs que l'on joue de parties, excepté une, divisé par le produit d'autant de premiers nombres impairs. Le premier produit sera la mise du perdant, le second produit sera la part qui en appartient au gagnant.

Par exemple, si on joue en 4 parties, prenez les 3 premiers nombres pairs : 2, 4, 6; multipliez l'un par l'autre, c'est 48; prenez les 3 premiers impairs : 1, 3, 5; le produit c'est 15 qui appartiendront au gagnant sur l'argent du perdant, si on a mis chacun 48 pistoles.

Cette règle sert pour la première et la seconde partie, celui qui en a deux ayant le double de celui qui n'en a qu'une. Il en a la démonstration, mais qu'il croit très difficile.

(¹) *Comp.* Lettre LXX. 3. — L'énoncé de Carcavi est mal conçu et en désaccord avec l'exemple.

3. Voici une autre proposition qu'il a faite à M. de Fermat, laquelle il juge sans comparaison plus difficile que toutes les autres :

Deux joueurs jouent à cette condition que la chance du premier soit 11 et celle du second 14; un troisième jette les trois dés pour eux deux et, quand il arrive 11, le premier marque un point et, quand il arrive 14, le second de son côté en marque un. Ils jouent en 12 points, mais à condition que, si celui qui jette le dé ramène 11 et qu'ainsi le premier marque un point, s'il arrive que le dé fasse 14 le coup d'après, le second ne marque point, mais en ôte un au premier, et ainsi réciproquement, en sorte que, si le dé amène six fois 11 et le premier ait marqué six points, si en après le dé amène trois fois de suite 14, le second ne marquera rien, mais ôtera trois points du premier. S'il arrive aussi en après que le dé fasse six fois de suite 14, il ne restera rien au premier et le second aura trois points, et s'il amène encore huit fois de suite 14 sans amener 11 entre deux, le second aura 11 points et le premier rien; et s'il amène quatre fois de suite 11, le second n'aura que sept points et l'autre rien; et s'il amène cinq fois de suite 14, il (¹) aura gagné.

La question parut si difficile à M. Pascal qu'il douta si M. de Fermat en viendroit à bout, mais il m'envoya incontinent cette solution :

Celui qui a la chance de 11, *contre celui qui a la chance* 14, *peut parier* 1156 *contre* 1, *mais non pas* 1157 *contre* 1;

et qu'ainsi la véritable raison de ce parti étoit entre les deux; par où M. Pascal ayant connu que M. Fermat avoit fort bien résolu ce qui lui avoit été proposé, il me donna les véritables nombres pour les lui envoyer et pour lui témoigner que de son côté il ne lui avoit pas proposé une chose qu'il n'eût résolue auparavant. Les voici :

150 094 635 296 999 121
129 746 337 890 625.

Mais ce que vous trouverez de plus considérable est que le dit Sr de

(¹) Lisez : *le second.*

Fermat en a la démonstration, comme aussi M. Pascal de son côté, bien qu'il y ait apparence qu'ils se soient servis d'une différente méthode.

..... 4. J'ai envoyé votre livre (¹) à M. de Fermat, dont il rend très humbles grâces et vous remercie très humblement de celui que vous avez eu la bonté de me donner.....

(¹) Il s'agit ici d'exemplaires des premiers opuscules de Huygens (*voir* ci-dessus, page 320, note 1), adressés par lui à Claude Mylon pour Carcavi et Fermat (*Corresp. Huyg.*, n° 297, 306, 308, 310) aux soins de François Henry, avocat au Parlement de Paris.

Nous ne reproduisons pas, dans la lettre de Carcavi, quelques passages étrangers à ses relations avec Fermat et Pascal.

ANNÉE 1657.

LXXIX.

PREMIER DÉFI AUX MATHÉMATICIENS (1).

MERCREDI 3 JANVIER 1657.

A

(*Comm. ep.*, n° 33.)

Problemata duo mathematica, tanquam indissolubilia Gallis, Anglis, Hollandis, nec non cæteris Europæ Mathematicis proposita a D^{no}. de Fermat, Regis Consiliario in Tolosano Parlamento,

Castris Parisios ad D^{um}. Claudium Martinum Laurenderium, Doctorem Medicum, transmissa 3 *nonas Januar.* 1657, *accepta verò* 12 *Kal. Febr.*

PROBLEMA PRIUS.

1. Invenire cubum qui, additus omnibus suis partibus aliquotis, conficiat quadratum.

2. Ut numerus 343 est cubus a latere 7. Omnes ejus partes aliquotæ sunt : 1, 7, 49, quæ, adjunctæ ipsi 343, conficiunt numerum 400, qui est quadratus a latere 20. Quæritur alius cubus ejusdem naturæ.

(1) Le titre qui précède la rédaction A du Défi semble avoir été composé par Willem Boreel, Ambassadeur de Hollande en France de 1650 à 1668, lequel, le 26 janvier 1657, adressa la pièce à Golius pour Schooten à Leyde.

Le titre de la rédaction B est de la main de Thomas White, qui servait d'intermédiaire entre Digby et Brouncker; celui-ci reçut le défi le 4 mars 1657, et le transmit le lendemain à Wallis.

L'expression : *Gallia Celtica*, dans cette seconde rédaction, prouve que le défi avait été également adressé à Frenicle, probablement par une lettre directe de Fermat à ce dernier.

PROBLEMA POSTERIUS.

3. Quæritur etiam numerus quadratus qui, additus omnibus suis partibus aliquotis, conficiat numerum cubum.

B

(*Va*, p. 188; *Comm. ep.*, nº 1.)

A challenge from M. Fermat for D. Wallis, with the hearty commendations of the messager, Thomas White.

Proponatur (si placet) Wallisio et reliquis Angliæ Mathematicis sequens quæstio numerica :

Invenire etc. (*ut supra* 1).

Exempli gratia, numerus 343 est cubus a latere 7. Omnes ipsius partes etc. (*ut supra* 2).

Quæritur etc. (*ut supra* 3).

Has solutiones exspectamus; quas, si Anglia aut Galliæ Belgica et Celtica non dederint, dabit Gallia Narbonensis, easque in pignus nascentis amicitiæ D. Digby offeret et dicabit.

LXXX.

FERMAT A FRENICLE [1].

< FÉVRIER 1657 >

(*Comm. ep.*, nº 33; *Correspondance de Huygens*, nº 372.)

Tout nombre non quarré est de telle nature qu'on peut trouver infinis quarrés par lesquels si vous multipliez le nombre donné et si vous ajoutez l'unité au produit, vienne un quarré.

[1] Cette pièce est un extrait envoyé d'abord par Cl. Mylon à Huygens à la suite d'une lettre datée du 2 mars 1657; Huygens le renvoya le 9 mars à Schooten.

Exemple : 3 est un nombre non quarré, lequel multiplié par 1, qui est quarré, fait 3 et, en prenant l'unité, fait 4, qui est quarré.

Le même 3, multiplié par 16, qui est quarré, fait 48 et, en prenant l'unité, fait 49, qui est quarré.

Il y en a infinis qui, multipliant 3, en prenant l'unité, font pareillement un nombre quarré.

Je vous demande une règle générale pour, étant donné un nombre non quarré, trouver des quarrés qui, multipliés par le dit nombre donné, en ajoutant l'unité, fassent des nombres quarrés.

Quel est, par exemple, le plus petit quarré qui, multipliant 61, en prenant l'unité, fasse un quarré?

Item, quel est le plus petit quarré qui, multipliant 109 et prenant l'unité, fasse un quarré?

Si vous ne m'envoyez pas la solution générale, envoyez-moi la particulière de ces deux nombres que j'ai choisis des plus petits, pour ne vous donner pas trop de peine.

Après que j'aurai reçu votre réponse, je vous proposerai quelque autre chose. Il paroît, sans le dire, que ma proposition n'est que pour trouver des nombres entiers, qui satisfassent à la question, car, en cas de fractions, le moindre arithméticien en viendroit à bout.

LXXXI.

SECOND DÉFI DE FERMAT AUX MATHÉMATICIENS (1).

FÉVRIER 1657.

(*Va*, p. 190; *Comm. ep.*, n° 8.)

Quæstiones pure arithmeticas vix est qui proponat, vix qui intelligat. Annon quia Arithmetica fuit hactenus tractata geometricè potius

(1) Cette pièce, qui pose le même problème que la Lettre précédente LXXX à Frenicle, fut reçue par Brouncker, de la part de Digby et par l'intermédiaire de Thomas White, en mars 1657.

quàm arithmeticè? Id sane innuunt pleraque et Veterum et Recentiorum volumina; innuit et ipse Diophantus (¹). Qui licet à Geometria paulo magis quàm cæteri discesserit, dum Analyticen numeris tantum rationalibus adstringit, eam tamen partem Geometrià non omnino vacare probant satis superque *Zetetica* Vietæa, in quibus Diophanti methodus ad quantitatem continuam, ideoque ad Geometriam porrigitur.

Doctrinam itaque de numeris integris tanquam peculiare sibi vendicat Arithmetica patrimonium; eam, apud Euclidem leviter duntaxat in *Elementis* adumbratam, ab iis autem qui secuti sunt non satis excultam (nisi forte in iis Diophanti libris, quos injuria temporis abstulit, delitescat), aut promovere studeant Ἀριθμητικῶν παῖδες aut renovare.

Quibus, ut præviam lucem præferamus, theorema seu problema sequens aut demonstrandum aut construendum proponimus; hoc autem si invenerint, fatebuntur hujusmodi quæstiones nec subtilitate, nec difficultate, nec ratione demonstrandi, celebrioribus ex Geometria esse inferiores :

Dato quovis numero non quadrato, dantur infiniti quadrati qui, in datum numerum ducti, adscitâ unitate conficiant quadratum.

Exemplum. — Datur 3, numerus non quadratus; ille, ductus in quadratum 1, adscitâ unitate conficit 4, qui est quadratus.

Item idem 3, ductus in quadratum 16, adscitâ unitate facit 49 qui est quadratus.

Et, loco 1 et 16, possunt infiniti quadrati idem præstantes inveniri: sed canonem generalem, *dato quovis numero non quadrato*, inquirimus.

Quæratur, verbi gratia, quadratus qui, ductus in 149, aut 109, aut 433, etc., adscitâ unitate conficiat quadratum.

(¹) *Voir* le *Traité des nombres polygones*. — Fermat vise d'ailleurs le fait que Diophante admet, pour ses problèmes, les solutions en nombres fractionnaires.

LXXXI *bis*.

BOULLIAU A FERMAT [1].

MARS 1657.

(Bib. Nat. fr. 13026, f° 51.)

Illustrissimo ac eruditissimo viro Domino de Fermat, in suprema Curia Tholosana consiliario, Mathematico

τῷ πάνυ

Ismael Bullialdus S. P. D.

Hanc de Porismatibus scriptiunculam [2], Vir Ill^me^, simul cum aliis paucis, circa theoremata aliquot geometrica, meis lucubrationibus, cum Mathematicis nostræ ætatis communicare et publici juris facere statui; eam vero rem cùm occasione eruditi simul ac subtilis opusculi tui de Porismatibus, quod anno superiore [3] ad amicos tuos huc transmisisti, aggressus sim, Te antesignanum sequor; quod mihi decori ac gloriæ vertit. Tibi enim, Vir eximie, quàm studiose te colam aliquatenus significare, tam mihi gratum ac jucundum est, ut occasionem, si nata opportune non fuisset, multis curis studioque vehementi redemissem. Omnes equidem, quibus virtutes tuæ notæ sunt, ingenii judiciique acumen probatum, merito te suspiciunt ac celebrant : nec soli per Galliam qui vivunt, verùm per universam Europam

(1) Lettre inédite, dont nous devons l'indication à M. Lucien Auvray, de la Bibliothèque nationale. Elle est publiée d'après la minute de Boulliau.

(2) Il s'agit de l'Ouvrage de Boulliau, dont le titre est donné Tome I, page 77, note 2. *Comparer* avec la présente Lettre l'extrait inséré dans la Note précitée.

(3) Dans l'*Exercitatio de Porismatibus* (*voir* Tome I, p. 77, note, ligne 10 en remontant), Boulliau dit *ante biennium;* mais cette expression, qui indique la fin de 1654, semble se rapporter à l'envoi à Paris par Fermat de propositions détachées comme les *Porismata duo* (Tome I, p. 73 à 76), retrouvés dans les papiers de Pascal. L'opuscule *Porismatum Euclideorum etc.* (Tome I, p. 76 à 84), ici désigné expressément, n'aurait été communiqué au contraire qu'en 1656 (*anno superiore*). Il y a donc lieu de corriger dans ce sens ce que nous avons dit sur la date de cette communication Tome I, page 78, deuxième alinéa de la note.

laudes tuas illi prædicant, quibus nomen tuum innotuit; atque in Italia dum egi, Bonaventuram Cavallerium Bononiæ, et Evangelistam Torricellum Florentiæ, summos hujus nostri sæculi Mathematicos, audivi εὑρήματα tua sublimes mentis tuæ effectiones, quarum copia ipsis facta erat, mirantes summisque laudibus extollentes. Inter illos itaque, qui Te toto animo colunt et venerantur, me recense; utque officium, tenue quamvis, acceptum gratumque Tibi sit, hoc mihi perfice. Et quæ cum paucis hactenus communicasti, præstantissimos animi tui partus, omnium utilitati et commodo ut serviant, in publicum emitte, illosque diutius comprimere noli. Vale Vir Ill^me^.

Scribebam Lutetiæ Parisior. die Martii 1657.

LXXXII.

FERMAT A DIGBY.

VENDREDI 20 AVRIL 1657.

(*Va*, p. 189-190; *Comm. ep.*, n° 4.)

MONSIEUR,

1. Puisque vous voulez que les complimens cessent, soit fait; il me suffit de vous assurer une fois pour toutes que vous vous êtes très-justement acquis un pouvoir absolu sur moi et que je ne perdrai point d'occasion à vous le témoigner.

J'ai lu l'*Arithmetica infinitorum* (1) de Wallisius et j'en estime beaucoup l'auteur; et, bien que la quadrature tant des paraboles que des hyperboles infinies ait été faite par moi depuis fort longues années et

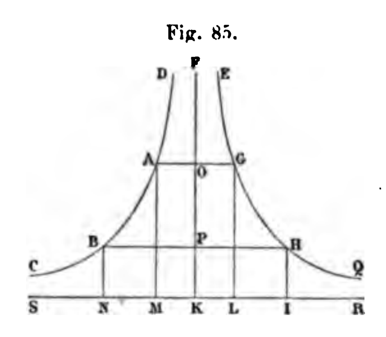
(1) Johannis Wallisii SS. Th. D. Geometriæ Professoris Saviliani in celeberrimâ Academia Oxoniensi Arithmetica infinitorum sive Nova methodus inquirendi in Curvilineorum quadraturam aliaque difficiliora Matheseos Problemata; Oxonii Typis Leon. Lichfield Academiæ Typographi, Impensis Tho. Robinson, Anno 1656. 216 pages in-4°.

que j'en aie autrefois entretenu l'illustre Torricelli ([1]), je ne laisse pas d'estimer l'invention de Wallisius, qui sans doute n'a pas su que j'eusse préoccupé son travail.

2. Voici une de mes propositions aux termes où je la conçus en l'envoyant à Torricelli :

Soient les deux droites SKR et KOF (*fig.* 85) et soient décrites les courbes EGHQ d'un côté et DABC de l'autre, en forme d'hyperboles

Fig. 85.



dont les asymptotes soient les droites premièrement données. Soient encore tirées AG, BH, parallèles à SKR, et les droites BN, AM, GL, HI, parallèles à KOF.

En l'hyperbole ordinaire, le rectangle NP est égal au rectangle MAO; mais supposons maintenant que le produit du quarré BN et de la droite BP soit égal au produit du quarré MA et de la droite AO : en ce cas, la courbe sera une nouvelle hyperbole dont la propriété sera que

([1]) Dans une lettre perdue, probablement de la fin de 1646, et qui semble avoir été la seule que Fermat ait adressée à Torricelli. Elle dut répondre à une communication à laquelle Torricelli fait allusion dans la partie inédite de sa lettre à Roberval du 7 juillet 1646, dans celle à Mersenne du même jour (*Bullettino Boncompagni*, VIII, pages 400-404) et dans celle à Carcavi du 8 juillet 1646 (*Memorie della Reale Accademia dei Lincei*, V_3, 20 juin 1880). Dans la première de ces lettres (Bibl. Nat. lat., 11196, f° 16 v°), on lit :

« Hyperbolarum Theoremata, quæ mitto ad Ill^m. De Fermat, ut judicium subeant, num » cum parabolis saltem aliqua ex parte conferri possint, videre poteris. Si unius hyper- » bolæ primariæ quadratura tamdiu quæsita est, nos pro una infinitas damus. »

Ces théorèmes ont été de fait envoyés, avec la lettre du 8 juillet 1646, à Carcavi, qui avait communiqué à Torricelli des propositions de Fermat sur les nombres. Le géomètre italien connaissait d'ailleurs, au moins par les *Cogitata* de Mersenne (1644), les travaux de Fermat sur les paraboles de divers degrés (*voir* Tome I, page 195, note 1).

le parallélogramme BI sera égal à l'espace compris sous la base BH et les deux courbes BADF, FEGH, qui vont à l'infini du côté de F.

Que si le produit du cube BN et de la droite BP est égal au produit du cube AM et de la droite AO, en ce cas, ce sera une autre hyperbole dont la propriété sera que le parallélogramme BI sera double de l'espace compris dans la base BH et les deux courbes en montant, *ut supra*.

Et par règle générale, si le produit d'une puissance de BN par une puissance de BP est égal au produit d'une pareille puissance de MA par une pareille de AO (en supposant celles de BN et MA pareilles entre elles, comme aussi celles de BP et de AO aussi pareilles), le parallélogramme BI sera à la figure prolongée à l'infini *ut supra*, comme la différence de l'exposant de la puissance de BN avec l'exposant de la puissance de BP est à l'exposant de la puissance de BP.

De sorte qu'il suit de là qu'en l'hyperbole ordinaire l'espace de la figure prolongée à l'infini n'est point égal à un espace donné, parce que l'exposant des puissances, étant le même, ne donne aucune différence; et, pour faire que l'espace de la dite figure prolongée à l'infini soit égal à un espace donné, il faut que l'exposant de BN soit plus grand que celui de BP, comme il est aisé de remarquer.

3. Tout ceci, quoiqu'énoncé un peu diversement, se peut tirer du livre de Wallisius; mais il n'a pas fait une spéculation sur ces figures, de laquelle il sera sans doute bien aise d'être averti et qui peut passer pour un des miracles de la Géométrie. Je l'ai autrefois donnée à Torricelli aussi bien que la précédente; c'est :

Comme il arrive que quelquefois l'espace prolongé à l'infini, comme BADFEGH, est aussi infini, comme en l'hyperbole ordinaire, et quelquefois fini, comme en celles dont les exposants de BN surmontent ceux de BP, on demande si, lorsque le dit espace prolongé à l'infini est égal à un espace fini, il a un centre de gravité fixe et certain.

Or, il arrive une chose merveilleuse en cette recherche et laquelle j'ai découverte et démontrée, c'est que quelquefois le dit espace,

quoique fini, n'a point de centre de gravité fixe, et quelquefois il en a.

Car, par exemple, lorsque le produit du quarré BN et de la droite BP est égal aux produits semblablement tirés, la figure BADFEGH prolongée à l'infini, qui en ce cas est égale au parallélogramme BI, n'a pourtant aucun centre de gravité.

Mais, si le produit, par exemple, du cube BN et de la droite BP, est égal aux produits semblables et semblablement tirés, en ce cas, non seulement l'espace de la figure prolongé à l'infini est égal à un espace donné, qui est, comme nous avons dit, la moitié du parallélogramme BI, mais encore cette figure prolongée à l'infini a un centre de gravité, qui va en ce cas en la ligne PF coupée en telle sorte au point O que la ligne PO soit égale à la ligne KP; et ce point O sera le dit centre de gravité de cette figure prolongée à l'infini.

Si Monsieur Wallisius veut avoir la démonstration de cette proposition et de la règle générale pour trouver les dits centres de gravité, je vous l'envoierai pour lui en faire part.

4. Pour ce qui regarde la quadrature du cercle dans son dit Traité, je n'en suis pas pleinement persuadé, car ce qui se déduit par comparaison en Géométrie n'est pas toujours véritable.

5. Je ne vous parle ni de votre Livre (1), ni de celui de Thomas Anglus (2) : *ne sutor ultra crepidam*. Vous êtes souverain en Physique et je vous reconnois pour tel : j'espère pourtant au premier voyage vous entretenir de la proportion que gardent les graves dans leur descente

(1) Il s'agit sans doute de : Two Treatises in the one of which The Nature of bodies, in the other the Nature of man's soule is looked into in way of discovery of the immortality of reasonable soules. Ψυχῆς φύσιν ἀξίως λόγου κατανοῆσαι οἴει δυνατὸν εἶναι ἄνευ τῆς τοῦ ὅλου φύσεως; animæ naturam, absque totius natura, sufficienter cognosci posse existimas? Plato in Phæd. At Paris, Printed by Gilles Blaizot. MDCXLIIII with Priviledge. C'est le Chapitre X (p. 76-86) qui est consacré à la pesanteur.

(2) Il s'agit de : Euclides physicus sive de principiis naturæ Stœcheidea E. Authore Thoma Anglo Ex Albiis East-Saxonum. Londini prostant apud Johannem Crook. MDC.L.VII.

naturelle, de quoi vous avez traité dans votre Livre que Monsieur Borel ([1]) m'a fait la faveur de me faire voir.

Je suis, Monsieur, votre très humble et très obéissant serviteur,

FERMAT.

A Castres, le 20 avril 1657.

LXXXIII.

FERMAT A DIGBY.

MERCREDI 6 JUIN 1657.

(*Va*, p. 191; *Comm. ep.*, n° 11.)

MONSIEUR,

J'ai reçu votre dernière lettre la veille du départ de M. Borel, qui ne me donne quasi pas le loisir de vous faire un mot de réponse.

Vos deux lettres *angloises* ([2]) m'ont été traduites par un jeune *Anglois* qui est en cette ville et qui n'a point connoissance de ces matières, de sorte que sa traduction s'est trouvée si peu intelligible que je n'y ai pu découvrir aucun sens réglé, et ainsi je ne puis vous résoudre si ce Mylord a satisfait à mes questions ou non. Il me semble pourtant, au travers de l'obscurité de cette traduction bourrue, que l'auteur des lettres a trouvé mes questions un peu trop aisées, ce qui me fait croire qu'il ne les a pas résolues.

Et parce qu'il pourroit équivoquer sur le sens de mes propositions, j'ai demandé un nombre cube en nombres entiers, lequel, ajouté à toutes ses parties aliquotes, fasse un nombre quarré.

J'ai donné par exemple 343, qui est cube et aussi nombre entier,

([1]) Probablement le médecin du Roi, Pierre Borel, né à Castres vers 1620 et fixé à Paris depuis 1653.

([2]) Lettres de Brouncker écrites en mars 1657 et qui sont perdues. Elles répondaient aux défis de Fermat (Pièces LXXIX et LXXXI); l'analyse s'en trouve dans la Lettre n° 9 du *Commercium epistolicum*.

lequel, ajouté à toutes ses parties aliquotes, fait 400, qui est un nombre quarré; et, parce que cette question reçoit plusieurs autres solutions, je demande un autre nombre cube en entiers, qui, joint à toutes ses parties aliquotes, fasse un nombre quarré.

Et si le Mylord Brouncker répond qu'en entiers il n'y a que le seul nombre 343 qui satisfasse à la question, je vous promets et à lui aussi de le désabuser en lui en exhibant un autre.

Je demandois encore un quarré en entiers qui, joint à toutes ses parties aliquotes, fasse un cube.

Pour la question proposée dans l'Écrit latin (1) que je vous envoyai, elle est aussi en nombres entiers, et, partant, les résolutions en fractions, lesquelles peuvent être d'abord fournies *a quolibet de trivio arithmetico*, ne me satisferoient pas.

Je suis avec respect, Monsieur, votre très humble et très obéissant serviteur,

FERMAT.

A Castres, le 6 juin 1657.

Je vous parlerai de la descente naturelle des corps pesants dès que j'aurai un peu plus de loisir (2).

LXXXIV.

FERMAT A DIGBY.

MERCREDI 15 AOUT 1657.

(*Comm. ep.*, n° 12; *Va.*, p. 191-193.)

MONSIEUR,

1. J'ai reçu avec joie et satisfaction votre dernier paquet et, quand il ne contiendroit autre nouvelle que celle de votre convalescence et

(1) La pièce LXXXI.

(2) Ce post-scriptum, emprunté au tome II de l'édition des Œuvres de Wallis (Oxford, 1693, in-f°), manque dans l'édition du *Commercium* de 1658. — Cf. Lettre LXXXII, 5.

du retour de votre santé, c'est un bien si grand et si considérable pour tous ceux qui aiment les belles-lettres, qu'ils ne peuvent en recevoir un plaisir médiocre.

2. J'ai reçu la copie de la lettre de Monsieur Wallis ([1]), que j'estime comme je dois, et j'avoue que ses figures sont les mêmes que les miennes et que ses conclusions pour leur quadrature sont aussi les mêmes; mais sa façon de démontrer, qui est fondée sur induction plutôt que sur un raisonnement à la mode d'Archimède, fera quelque peine aux novices, qui veulent des syllogismes démonstratifs depuis le commencement jusqu'à la fin. Ce n'est pas que je ne l'approuve; mais, toutes ses propositions pouvant être démontrées *viâ ordinariâ, legitimâ et Archimedeâ* en beaucoup moins de paroles que n'en contient son livre, je ne sais pas pourquoi il a préféré cette manière par notes algébriques à l'ancienne, qui est et plus convaincante et plus élégante, ainsi que j'espère lui faire voir à mon premier loisir.

Je voudrois qu'ensuite il eût déterminé les centres de gravité de ces hyperboles infinies, en distinguant celles qui en ont d'avec celles qui n'en ont pas ([2]); car, tandis qu'il dira que la chose lui est connue et qu'il n'en a pas voulu charger son livre, il ne me persuadera pas, et d'autant plus que la proposition générale sans démonstration me suffira de sa part. Et je vous réponds, à l'avance, qu'elle ne sauroit contenir plus de huit ou dix lignes; dès qu'il me l'aura envoyée, je lui ferai part de ma spéculation sur ce sujet et de ma façon de démontrer.

3. Pour les questions des nombres, j'ose vous dire, avec respect et sans rien rabattre de la haute opinion que j'ai de votre nation, que les deux lettres de Mylord Brouncker ([3]), quoique obscures à mon égard et mal traduites, n'en contiennent point aucune solution; ce n'est pas que je prétende par là renouveler les joûtes et les anciens coups de

([1]) *Cf.* l'Épitre V du *Commercium* datée du 6 juin 1657 et répondant à la Lettre LXXXII.
([2]) *Cf.* l'Épitre XVI du *Commercium*, réponse de Wallis datée du 21 novembre 1657.
([3]) *Voir* page 341, note 2.

lances que les Anglois ont autrefois faits contre les François : mais, sans sortir de la métaphore, j'ose vous soutenir, et à vous, Monsieur, plus justement qu'à tout autre, qui excellez aux deux métiers, que le hasard et le bonheur se mêlent quelquefois aux combats de science aussi bien qu'aux autres, et qu'en tous cas nous pouvons dire que *non omnis fert omnia tellus* (1).

Je serai pourtant ravi d'être détrompé par cet ingénieux et savant seigneur et, pour lui témoigner que notre combat ne sera point à outrance, je me relâche dans la question suivante, que je m'en vais lui proposer, de la rigueur de mes premières questions qui ne vouloient que des nombres entiers : il me suffira qu'ils soient rationaux à la mode de Diophante. (Le nom de cet auteur me donne l'occasion de vous faire souvenir de la promesse qu'il vous a plu me faire, de recouvrer quelque manuscrit de cet auteur, qui contienne tous les treize livres, et de m'en faire part, s'il vous peut tomber en main.)

4. Voici la nouvelle question, ou pour Mylord Brouncker ou pour Monsieur Wallis, que j'écris en latin suivant votre ordre (2) :

Datum numerum ex duobus numeris cubis compositum dividere in duos alios numeros cubos.

Hanc propositionem in quadratis tantum exsequutus est Diophantus, in cubis ne tentavit quidem, in iis saltem libris qui ad nos de majore ipsius opere pervenerunt.

Exempli gratia, proponatur numerus 28 *ex duobus cubis* 1 *et* 27 *compositus.*

Oportet dictum numerum 28 *in duos alios cubos rationales dividere et propositionis solutionem generaliter præstare.*

Je consens que M. Frenicle l'entreprenne; je suis persuadé qu'il ne la trouvera pas si aisée que les autres, que je savois être de sa juridiction. Je l'estime extraordinairement aussi bien que vous, mais pour-

(1) Allusion à Virgile, Eclog. IV, 39 : *omnis feret omnia tellus.*
(2) Cf. Observation IX sur Diophante.

tant ce que je vais ajouter l'étonnera, si vous prenez la peine de le lui communiquer.

5. Je lui avois écrit qu'il n'y a qu'un seul nombre quarré en entiers qui, joint au binaire, fasse un cube, et que ledit quarré est 25, auquel si vous ajoutez 2, il se fait 27, qui est cube (1). Il a peine à croire cette proposition négative et la trouve trop hardie et trop générale.

Mais, pour augmenter son étonnement, je dis que, si on cherche un quarré qui, ajouté à 4, fasse un cube, il n'en trouvera jamais que deux en nombres entiers, savoir 4 et 121. Car 4 ajouté à 4 fait 8 qui est cube, et 121 ajouté à 4 fait 125 qui est aussi cube. Mais, après cela, toute l'infinité des nombres n'en sauroit fournir un troisième qui ait la même propriété.

Je ne sais ce que diront vos Anglois de ces propositions négatives et s'ils les trouveront trop hardies : j'attends leur résolution et celle de M. Frenicle, qui n'a pas répondu à une longue lettre que M. Borel lui rendit de ma part. De quoi je suis surpris, car je lui répondois exactement à tous ses doutes et lui faisois quelque question de mon chef, dont j'attends la solution.

Je suis avec grand respect, Monsieur, votre très humble et très obéissant serviteur,

FERMAT.

A Castres, le 15 août 1657.

6. J'oubliois de vous dire que M. Borel a écrit à son père que M. l'Ambassadeur de Hollande s'étonnoit de quoi je n'avois pas répondu à M. Schooten qui prétend avoir résolu mes questions et m'en avoir proposé d'autres; mais je vous assure que je n'ai rien vu de sa part et que, si vous m'en envoyez copie, j'y répondrai (2).

7. J'ai mis la proposition un peu plus générale dans la page sui-

(1) *Cf.* Observation XLII sur Diophante.

(2) La réponse de Schooten au premier Défi (Pièce LXXIX) fut adressée par lui le 17 février 1657 à l'Ambassadeur de Hollande, Willem Boreel. Elle est insérée dans la Lettre n° 33 du *Commercium epistolicum* et dans la *Correspondance de Huygens*, nos 377 et 378.

vante où elle me semble être mieux ; on la peut concevoir pour M. Frenicle, qui aime les nombres entiers, en ces termes :

Trouver deux nombres cubes dont la somme soit cube,

et

Trouver deux nombres cubes dont la somme soit égale à deux autres nombres cubes.

8. *Proposuit Diophantus* (1) :

Datum numerum quadratum in duos quadratos dividere ;

item :

Datum numerum ex duobus quadratis compositum in duos alios quadratos dividere.

Quæstionem autem ad cubos evehere nec ipse nec Vieta tentavit : quidni igitur famosam propositionem et recentioribus reservatam Analystis expedire aut dubitemus aut differemus ?

Proponatur itaque :

Datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere ;

item :

Datum numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos rationales dividere,

et inquiratur quid eâ de re Anglia, quid Hollandia censeat.

(1) *Cf.* Observations II et III sur Diophante.

LXXXV.

FERMAT A DIGBY [1].

REMARQUES SUR L'ARITHMÉTIQUE DES INFINIS DU S. J. WALLIS.

MERCREDI 15 AOUT 1657.

(*Comm. ep.*, n° 13; *Va.*, p. 193-196.)

I. En son Épître il déclare comment il s'est mis à la recherche de la quadrature du cercle et dit que quelques vérités, qui ont été découvertes en Géométrie, lui ont donné l'espérance qu'elle se pourroit trouver. Ces vérités sont :

Que la raison des cercles infinis du cône aux infinis du cylindre est connue, savoir celle du cône au cylindre qui a même base et hauteur; et pareillement la raison des diamètres desdits cercles, savoir celle du triangle qui passe par l'axe du cône au parallélogramme qui passe par l'axe du cylindre;

Comme aussi on a la raison du conoïde parabolique au cylindre circonscrit, et celle de la parabole au parallélogramme qui passent par leurs axes, qui sont comme l'assemblage des diamètres des cercles infinis qui composent lesdits solides;

De plus, qu'on a aussi trouvé la raison des ordonnées (tant au triangle qu'au conoïde parabolique ou parabole), qui sont les diamètres desdits cercles.

D'où il conclut que, puisqu'on a trouvé aussi la raison de la sphère au cylindre circonscrit, ou celle de l'infinité des cercles parallèles, dont on peut concevoir que la sphère est composée, à pareille multitude de ceux qui se peuvent feindre au cylindre, on pourra aussi espérer de pouvoir découvrir la raison des ordonnées en la sphère ou au cercle à celles du cylindre ou quarré, savoir la raison des dia-

(1) Pièce apportée par White à Brouncker en même temps que la précédente (premiers jours d'octobre 1657). Wallis répondit (à Digby) par la Lettre 16 du *Commercium*.

mètres des cercles infinis qui composent la sphère aux diamètres des cercles du cylindre. Ce qui seroit avoir la quadrature du cercle.

Mais, de même qu'on ne pourroit pas avoir la raison de tous les diamètres pris ensemble des cercles qui composent le cône à ceux du cylindre circonscrit, si on n'avoit la quadrature du triangle; non plus que la raison des diamètres des cercles qui composent le conoïde parabolique à ceux qui font le cylindre circonscrit, si on n'avoit la quadrature de la parabole; ainsi on ne pourra pas connoître la raison des diamètres de tous les cercles qui composent la sphère à ceux des cercles qui composent le cylindre circonscrit, si l'on n'a pas la quadrature du cercle. Car, de demander la raison qu'il y a entre les diamètres de tous les cercles parallèles qu'on peut concevoir en la sphère (lesquels diamètres, pris tous ensemble, ne sont autre chose qu'un cercle) et ceux des cercles qu'on peut feindre au cylindre circonscrit (lesquels font un quarré circonscrit audit cercle), cela n'est autre chose que de demander la raison du cercle au quarré circonscrit.

II. En la même Épître (¹), après avoir posé une suite de nombres, savoir :

$$1, \quad 6, \quad 30, \quad 140, \quad 630,$$

il demande le terme moyen qui doit être mis entre 1 et 6. Je réponds que, si on a égard à la suite entière des dits nombres, on ne peut poser aucun terme moyen entre les dits 1 et 6, pource qu'en cette suite les

(¹) Si, dans la suite de Wallis, on considère l'unité comme étant le terme de rang 0, le terme de rang n sera

$$T_n = \frac{3.5\ldots(2n-1)(2n+1)}{1.2\ldots(n-1)n} 2^n,$$

et l'on peut aussi poser

$$T_n = \frac{2n+1}{\pi} 2^{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \, dx, \quad \text{ou bien} \quad T_n = \frac{2^{2n}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \, dx} = \frac{2^{2n}}{\int_0^1 \frac{z^{2n+1} dz}{\sqrt{1-z^2}}},$$

d'où

$$T_{\frac{1}{2}} = \frac{8}{\pi}.$$

nombres ne font pas une proportion continue, mais, en autant de façons que l'un est comparé à l'autre, autant font-ils de proportions différentes; de sorte que ce sont plusieurs proportions ou progressions disjointes et ainsi, quand on prendroit un terme moyen entre 1 et 6, il n'auroit rien de commun avec les autres nombres.

Toute la proportion ou suite, qu'on peut remarquer entre ces nombres, consiste au rapport qu'ont entre eux les nombres dont ils proviennent par multiplication, auxquels on voit une espèce de progression arithmétique. Néanmoins il ne sçauroit passer aux nombres susdits, en telle sorte que, par icelui, on puisse donner un terme moyen entre deux des nombres, qui ait correspondance à toute la suite.

Au contraire, la propriété même de cette progression fait qu'il n'y en peut avoir; voici comment :

Les nombres donnés

$$1,\quad 6,\quad 30,\quad 140,\quad 630$$

sont produits par les suivants en multipliant :

$$1,\quad 4\tfrac{2}{1},\quad 4\tfrac{2}{2},\quad 4\tfrac{2}{3},\quad 4\tfrac{2}{4},$$

ou les équivalents :

$$1,\quad \frac{6}{1},\quad \frac{10}{2},\quad \frac{14}{3},\quad \frac{18}{4}.$$

En ces nombres, qui servent à faire les donnés, il est facile de voir où est le rapport. Il consiste, aux premiers, en la seule augmentation du dénominateur de la fraction qui y est jointe, ce qui fait diminuer les nombres d'autant plus qu'ils s'éloignent du premier terme, savoir de 1; et aux seconds

$$1,\quad \frac{6}{1},\quad \frac{10}{2},\quad \text{etc.},$$

qui sont les mêmes en autres termes, les numérateurs des fractions augmentent de 4 et les dénominateurs de l'unité, ce qui fait pareillement diminuer les nombres tant plus la progression avance : en sorte

que celui qui est le plus proche du premier terme 1, savoir $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$, qui vaut 6, est le plus grand de tous.

Il faut aussi remarquer que le rapport des nombres de la dite progression n'arrive pas jusques au premier terme 1, ou plutôt ne commence pas dès le premier terme, mais au second seulement, qui est sa borne. De sorte que, si on vouloit augmenter les termes de la dite progression, en la changeant et mettant un nombre moyen entre le premier et le second terme, savoir entre 1 et $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$, il ne faudroit pas avoir égard à 1, mais aux autres nombres

$$4\frac{2}{1},\quad 4\frac{2}{2},\quad 4\frac{2}{3},\quad 4\frac{2}{4},$$

ou à ces autres qui sont les mêmes :

$$\frac{6}{1},\quad \frac{10}{2},\quad \frac{14}{3},\quad \frac{18}{4};$$

car cette progression n'auroit pas de suite, si on la commençoit par 1.

Puis donc : qu'il ne faut pas avoir égard au premier terme 1, qui n'a rien de commun avec les nombres de la dite progression, mais aux autres seulement; et qu'ils augmentent à mesure qu'ils approchent du premier terme 1 : il s'ensuit que le nombre, qu'on prendroit entre 1 et $4\frac{2}{1}$ ou $\frac{6}{1}$, seroit plus grand que le dit $\frac{6}{1}$ ou 6, et il faudroit multiplier le premier terme 1 par ce nombre moyen qui seroit plus grand que 6, pour avoir le moyen terme entre les deux premiers des nombres premièrement donnés, qui sont 1 et 6 (car les dits nombres donnés

$$1,\quad 6,\quad 30,\quad 140,\quad 630$$

n'ont point d'autre rapport ou liaison que celle qu'ils empruntent de leurs multiplicateurs, autrement ils n'en ont aucune). Et ainsi on auroit un nombre plus grand que 6 pour le moyen terme d'entre 1 et 6; ce qui est absurde.

De là s'ensuit qu'on ne peut donner le moyen terme entre 1 et 6, en

tant qu'ils sont compris en la suite ou progression des nombres : 1, 6, 30, 140, 630.

On peut inférer de là que la ligne courbe VC (*fig.* 86) (¹) n'est point égale en elle-même et qu'elle ne peut provenir d'aucun mouvement continu qui soit égal ou réglé, mais de plusieurs, différens suivant ses parties; et que c'est une ligne composée de portions de plusieurs courbes comprises entre les parallèles à l'axe VX de la figure. Car, en

Fig. 86.

icelle, il est bien nécessaire que la moyenne ligne tirée entre la première et la seconde parallèle, savoir entre 1 et 6, soit moindre que 6. Mais, outre que cette moyenne ligne seroit de différente longueur suivant la nature et la propriété de cette portion de la courbe VC, qui n'a rien de commun avec les autres portions, comme a été dit, elle n'auroit rapport qu'avec les deux termes 1, 6, et non pas avec les autres, ni avec les moyennes qu'on auroit tirées entre deux, si on prenoit le tout conjointement.

III. En la première proposition le dit sieur Wallis propose une suite de quantités commençant par o (qui représente le point) et qui se suivent en progression arithmétique, et cherche quelle raison il y a entre la somme des dites quantités et la somme d'autant de termes égaux à la plus grande des données.

Le moyen qu'il donne pour trouver cette raison est de prendre les sommes de diverses quantités de nombres commençant par les moindres, puis comparer les raisons les unes aux autres et inférer de là une proposition universelle.

On se pourroit servir de cette méthode, si la démonstration de ce

(¹) La figure ne se trouvant pas dans le *Commercium*, nous la restituons d'après l'*Arithmetica infinitorum* de Wallis (*Opera mathematica*, Oxford, 1695, in-f°, tome I, p. 477).

qui est proposé étoit bien cachée et, qu'auparavant de s'engager à la chercher, on se voulut assurer à peu près de la vérité; mais il ne s'y faut fier que de bonne sorte et on doit y apporter les précautions nécessaires. Car on pourroit proposer telle chose et prendre telle règle pour la trouver qu'elle seroit bonne à plusieurs particuliers et néanmoins seroit fausse en effet et non universelle. De sorte qu'il faut être fort circonspect pour s'en servir, quoiqu'en y apportant la diligence requise, elle puisse être fort utile, mais non pas pour prendre, pour fondement de quelque science, ce qu'on en aura déduit, comme fait le sieur Wallis : car, pour cela, on ne se doit contenter de rien moins que d'une démonstration, et principalement au sujet de la proposition dont il s'agit, dont la solution et démonstration est fort facile.

Voici comme on démontrera que les dites quantités proposées, étant jointes ensemble, font la moitié d'autant de quantités égales à la plus grande d'icelles :

Soient exposées des quantités ou nombres qui commencent par le point ou par o, et qui se suivent en progression arithmétique; et soient celles de la première ligne

1° Quantités données	o	a	b	c	d
2° Quantités égales à la plus grande des données	d	d	d	d	d
3° Excès des plus grandes par dessus les données	d	c	b	a	o

Puisque les quantités données sont en progression arithmétique, le troisième terme b surpassera le second de pareille quantité que le second (savoir a) surpasse le premier qui est o; mais l'excès de a par dessus o est a : et, partant, toutes ces quantités se surpasseront l'une l'autre de proche en proche selon la quantité du second terme a. Et si on prend les quantités de deux en deux, laissant une d'icelles entre deux, comme sont a, c, ou b, d de la première ligne, leur différence sera le troisième terme, comme il est évident. Et de même, si on les prenoit de trois en trois, elles auroient le quatrième terme c pour leur différence.

De là il s'ensuit que, si on prend autant de termes égaux au plus grand terme *d* des quantités données, comme en la seconde ligne, leur excès par dessus les quantités données sera égal aux dites quantités données, comme on [le] voit en la troisième ligne. Car l'excès de *d* par dessus la plus grande des quantités données, savoir par dessus *d*, est o, qui est le premier terme des quantités données; l'excès du même *d* par dessus le terme précédent *c* est le second terme *a*, comme il a été montré, savoir pource que les deux quantités *c* et *d* sont prochaines; et ensuite l'excès de *d* par dessus *b* sera *b*, et ainsi des autres, jusques à ce qu'enfin, étant au premier terme o, l'excès de *d* par dessus icelui sera le même *d*.

Et ainsi la ligne des excès, qui est la troisième, sera égale à la première qui contient les quantités données; mais la première et la troisième ligne étant jointes ensemble (savoir les quantités données étant jointes aux excès des quantités de la seconde ligne par dessus celles de la première, qui sont les données), font la dite seconde ligne, qui a chacun de ses termes égal au plus grand de ceux de la première : partant la seconde ligne, ou le plus grand terme des données pris autant de fois qu'il y a de termes, sera double de la première ligne, c'est à dire des quantités données. Ce qu'il falloit démontrer.

IV. En la seconde proposition, il requiert que le premier terme soit o et le second 1. Autrement il dit que *moderatio est adhibenda*.

A cela je dis que, si on commence par o, quelque nombre qu'on mette pour le second terme, la somme d'autant de fois le plus grand terme sera toujours double des quantités données. Car, si pour *a*, *b*, *c*, *d* on prend quelques nombres qu'on voudra, qui soient en progression arithmétique depuis le premier terme o, cela succédera toujours en la même sorte, ainsi qu'il a été ci-devant démontré.

LXXXVI.

FERMAT A DE LA CHAMBRE.

AOUT 1657.

(D. III, 50).

A Toulouse, le mois d'août 1657.

MONSIEUR,

1. Je n'avois garde de vous obéir lorsque vous m'ordonniez de recevoir votre Livre (1) sans le lire. Le présent que vous m'en avez fait est une marque trop précieuse de l'amitié dont vous m'honorez; mais sa lecture m'a fait concevoir l'idée de cette amitié comme un bien qui mérite d'être conservé avec soin, avec respect et avec estime. Et pour vous le faire voir, je ne vous parlerai point de vos autres spéculations de Physique, quoiqu'elles soient pleines d'un raisonnement très solide et très subtil; il me suffira de vous entretenir un peu sur la matière de la réflexion et de la réfraction, quand ce ne seroit que pour réparer par cette lettre la perte d'un Discours que je vous avois adressé, il y a déjà quelques années, sur ce même sujet et que j'ai su n'être point venu en vos mains. Ce qui m'y confirme est que j'entre par là dans quelque société d'opinion avec vous, et j'ose même vous assurer par avance que, si vous souffrez que je joigne un peu de ma géométrie à votre physique, nous ferons un travail à frais communs qui nous mettra d'abord en défense contre M. Descartes et tous ses amis.

2. Je reconnois premièrement avec vous la vérité de ce principe, que la nature agit toujours par les voies les plus courtes. Vous en déduisez très bien l'égalité des angles de réflexion et d'incidence, et l'objection de ceux qui disent que les deux lignes qui conduisent la

(1) La Lumière à Monseigneur l'Éminentissime Cardinal Mazarin par le sieur De La Chambre, conseiller du Roy en ses Conseils et son Médecin ordinaire. A Paris, chez P. Rocolet, Imp. et Lib. ord. du Roy; au Palais, en la gallerie des Prisonniers, aux Armes du Roy et de la Ville. MDCLVII, avec Privilège du Roy (446 pages in-4°).

vue ou la lumière dans le miroir concave sont très souvent les plus longues, n'est point considérable, si vous supposez seulement, comme un autre principe indisputable, que tout ce qui appuie ou qui fait ferme sur une ligne courbe, de quelque nature qu'elle soit, est censé appuyer ou faire ferme sur une droite qui touche la courbe au point où la rencontre se fait : ce qui peut être prouvé par une raison de physique aidée d'une autre de géométrie.

Le principe de Physique est que la nature fait ses mouvements par les voies les plus simples. Or, la ligne droite étant plus simple que la circulaire ni que pas une autre courbe, il faut croire que le mouvement du rayon qui tombe sur la courbe se rapporte plutôt à la droite qui touche la courbe qu'à la courbe même.

Premièrement, parce que cette droite de l'attouchement est plus simple que la courbe; secondement (et c'est ce qui s'emprunte de la Géométrie), parce que aucune droite ne peut tomber entre la courbe et la touchante, par un principe d'Euclide. De sorte que le mouvement est justement le même sur la droite qui touche que sur la courbe qui est touchée.

Et, cela supposé, on ne peut jamais dire que les deux droites qui conduisent la lumière ou le rayon soient quelquefois les plus longues aux miroirs concaves, parce qu'en ce cas même elles se trouvent les plus courtes de toutes celles qui peuvent se réfléchir sur la droite qui touche la courbe. Et, par conséquent, il ne faut ni supposer que la nature agisse par contrainte en ce cas, ni conclure qu'elle suive une autre manière de mouvement que celle qu'elle pratique aux miroirs plans et en toute autre espèce de miroirs. De sorte que voilà votre principe pleinement établi pour la réflexion.

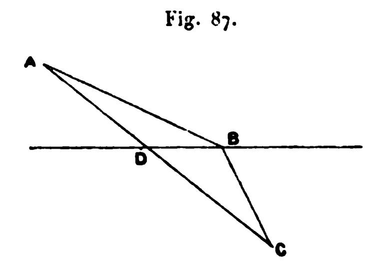
3. Mais, puisqu'il a servi à la réflexion, pourrons-nous en tirer quelqu'usage pour la réfraction? Il me semble que la chose est aisée et qu'un peu de géométrie nous pourra tirer d'affaire.

Je ne m'étendrai point sur la réfutation de la démonstration de M. Descartes. Je la lui ai autrefois contestée, à lui, dis-je, *viventi*

atque sentienti, comme disoit Martial (¹), mais il ne me satisfit jamais. L'usage de ces mouvements composés est une matière bien délicate et qui ne doit être traitée et employée qu'avec une très-grande précaution. Je les compare à quelques-uns de vos remèdes, qui servent de poison s'ils ne sont bien et dûment préparés. Il me suffit donc de dire en cet endroit que M. Descartes n'a rien prouvé, et que je suis de votre sentiment en ce que vous rejetez le sien.

Mais il faut passer plus outre et trouver la raison de la réfraction dans notre principe commun, qui est que la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus aisées. Il semble d'abord que la chose ne peut point réussir et que vous vous êtes fait vous-même une objection qui paroît invincible. Car (*fig.* 87) puisque, dans la page 315

Fig. 87.



de votre Livre, les deux lignes CB, BA qui contiennent l'angle d'incidence et celui de réfraction, sont plus longues que la droite ADC qui leur sert de base dans le triangle ABC, le rayon de C en A, qui contient un chemin plus court que celui des deux lignes CB, BA, devroit, au sens de notre principe, être la seule et véritable route de la nature, ce qui pourtant est contraire à l'expérience. Mais on peut se défaire aisément de cette difficulté en supposant, avec vous et avec tous ceux qui ont traité de cette matière, que la résistance des milieux est différente, et qu'il y a toujours une raison ou proportion certaine entre ces deux résistances, lorsque les deux milieux sont d'une consistance certaine et qu'ils sont uniformes entre eux.

Ne vous étonnez pas de ce que je parle de résistance, après que vous

(¹) MARTIAL, *Épigr.*, I, II, 5. — *Voir* les Lettres XXII et XXIV.

avez décidé que le mouvement de la lumière se fait en un instant et que la réfraction n'est causée que par l'antipathie naturelle qui est entre la lumière et la matière. Car, soit que vous m'accordiez que le mouvement de la lumière sans aucune succession peut être contesté et que votre preuve n'est pas entièrement démonstrative, soit qu'il faille passer par votre décision, à savoir que la lumière fuit l'abondance de la matière qui lui est ennemie, je trouve, même en ce dernier cas, que, puisque la lumière fuit la matière et qu'on ne fuit que ce qui fait peine et qui résiste, on peut, sans s'éloigner de votre sentiment, établir de la résistance où vous établissez de la fuite et de l'aversion.

Soit donc, par exemple, en votre figure le rayon CB qui change de milieu au point B, où il se rompt pour se rendre au point A. Si ces deux milieux étoient les mêmes, la résistance au passage du rayon par la ligne CB seroit à la résistance au passage du rayon par la ligne BA comme la ligne CB à la ligne BA. Car, les milieux étant les mêmes, la résistance au passage seroit la même en chacun d'eux et, par conséquent, elle garderoit la raison des espaces parcourus. D'où il suit que, les milieux étant différents et la résistance par conséquent différente, on ne peut plus dire que la résistance au passage du rayon par la ligne CB soit à la résistance au passage du rayon par la ligne BA comme la ligne CB à la ligne BA; mais en ce cas la résistance par la ligne CB sera à la résistance par la ligne BA comme CB à une autre ligne dont la raison à la ligne BA exprimera celle des deux résistances différentes.

Comme : si la résistance par le milieu A est double de la résistance par le milieu C, la résistance par CB sera à la résistance par BA comme la ligne CB au double de la ligne BA; et si la résistance par le milieu C est double de la résistance par le milieu A, la résistance par CB sera à la résistance par BA comme la ligne CB à la moitié de la ligne BA. De sorte qu'en ces deux cas, les deux résistances par CB et par BA, étant jointes, pourront être exprimées : ou par la ligne CB jointe à la moitié de la ligne BA, ou par la ligne CB jointe au double de BA.

Vous voyez déjà sans doute la conclusion de ce raisonnement : car,

soient donnés, par exemple, les deux points C et A en deux milieux différents séparés par la ligne BD et qui soient de telle nature que la résistance de l'un soit double de celle de l'autre; il faut chercher le point B auquel le rayon, qui va de C en A ou d'A en C, soit coupé ou rompu.

Si nous supposons que la chose est déjà faite, et que la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus aisées, la résistance par CB, jointe à la résistance par BA, contiendra la somme des deux résistances, et cette somme, pour satisfaire au principe, doit être la moindre de toutes celles qui se peuvent rencontrer en quelqu'autre point que ce soit de la ligne DB. Or ces deux résistances jointes sont en ce cas, comme nous avons prouvé, représentées : ou par la ligne CB jointe à la moitié de BA, ou par la même ligne CB jointe au double de BA.

La question se réduit donc à ce problème de Géométrie :

Étant donnés les deux points C *et* A *et la droite* DB, *trouver un point dans la droite* DB *auquel si vous conduisez les droites* CB *et* BA, *la somme de* CB *et de la moitié de* BA *contienne la moindre de toutes les sommes pareillement prises, ou bien que la somme de* CB *et du double de* BA *contienne la moindre de toutes les sommes pareillement prises;*

et le point B qui sera trouvé par la construction de ce problème sera le point où se fera la réfraction.

Vous voyez par là qu'il faut que le rayon se coupe et se rompe lorsque les milieux sont différents. Car, bien que la somme des deux lignes CB et BA soit toujours plus grande que la somme des deux lignes CD et DA ou que la toute CA, néanmoins la ligne CB, jointe à la moitié ou au double de BA, peut être plus courte que la ligne CD jointe à la moitié ou au double de DA.

Je vous avoue que ce problème n'est pas des plus aisés; mais, puisque la nature le fait en toutes les réfractions pour ne se départir pas de sa façon d'agir ordinaire, pourquoi ne pourrons-nous pas l'entreprendre?

Je vous garantis par avance que j'en ferai la solution quand il vous plaira et que j'en tirerai même des conséquences qui établiront solidement la vérité de notre opinion. J'en déduirai d'abord : que le rayon perpendiculaire ne se rompt point; que la lumière se rompt dès la première surface sans plus changer le biais qu'elle a pris; que le rayon rompu s'approche quelquefois de la perpendiculaire, et qu'il s'en éloigne quelque autre fois, à mesure qu'il passe d'un milieu rare dans un plus dense ou au contraire; et en un mot, que cette opinion s'accorde exactement avec toutes les apparences. De sorte que, si elle n'est pas vraie, on peut dire ce que disoit Galilée en un sujet différent, que la nature semble nous l'avoir inspirée *per pigliarsi gioco di nostri ghiribizzi* [1].

Mais j'ai tort de ne songer pas que le sujet de cette lettre ne devoit être qu'un remercîment. Je vous conjure, Monsieur, d'excuser sa longueur, quand ce ne seroit que par l'intérêt que vous y avez, et de la recevoir en tout cas comme un témoignage de l'estime que j'ai pour votre savoir et du respect avec lequel je suis, Monsieur,

Votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

LXXXVII.

DIGBY A FERMAT.

MERCREDI 5 DÉCEMBRE 1657.

(*Va.*, p. 196-197.)

MONSIEUR,

Je me donnai l'honneur de vous écrire le 19 du mois passé. Depuis ce temps-là, j'ai été en Normandie et à mon retour j'ai trouvé la Lettre

(1) Nous n'avons pu retrouver le texte auquel est empruntée cette citation.

que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire du 17 du même mois ([1]), dont je vous rends très-humbles grâces et m'estime très-heureux de vous servir dans le commerce qui est entre vous et Monsieur de Frenicle, à qui je montrai aussi votre Lettre et, comme vous y parlez de notre Chancelier Bacon, cela me fit souvenir d'un autre beau mot qu'il dit en ma présence une fois à feu Monsieur le Duc de Buckingham.

C'étoit au commencement de ses malheurs, quand l'assemblée des États, que nous appelons le Parlement, entreprit de le ruiner, ce qu'elle fit ensuite : ce jour là, il en eut la première alarme. J'étois avec le Duc, ayant dîné avec lui; le Chancelier survint et l'entretint de l'accusation qu'un de ceux de la Chambre Basse avoit présentée contre lui, et il supplia le Duc d'employer son crédit auprès du Roi pour le maintenir toujours dans son esprit. Le Duc lui répondit qu'il étoit si bien avec le Roi leur maître, qu'il n'étoit pas besoin de lui rendre de bons offices auprès de Sa Majesté : ce qu'il disoit, non pas pour le refuser, car il l'aimoit beaucoup, mais pour lui faire plus d'honneur. Le Chancelier lui répondit de très-bonne grâce qu'en effet il croyoit être parfaitement bien dans l'esprit de son Maître, mais aussi qu'il avoit toujours remarqué que, pour si grand que soit un feu et pour si fortement qu'il brûle de lui-même, il ne laissera pourtant pas de brûler mieux et d'être plus beau et plus clair, si on le souffle comme il faut.

De même j'ai dit à Monsieur Frenicle que, pour si grand feu d'esprit qu'il ait et quelque merveilleux que soit son génie pour la science des nombres, son feu seroit plus brillant, s'il le vouloit exciter ou augmenter par l'étude, par la lecture des anciens et par la conversation.

Il vous honore infiniment et dit que jamais homme n'a approché de votre fond de science; il m'a apporté ce matin un écrit pour vous l'envoyer. Je l'ai fait copier par mon secrétaire, car vous ne l'auriez pu lire; il écrit d'ordinaire sur des lambeaux de papier et si vite qu'il n'y a que lui même qui puisse lire son écriture.

([1]) Cette lettre est perdue.

Vous aurez vu, par ma dernière lettre, que j'ai reçu celle (1) que vous me fîtes l'honneur de m'écrire lorsque vous étiez à la campagne. Au lieu de vous laisser passer le titre de paresseux que vous vous donnez injustement, j'admire infiniment la facilité et la présence avec laquelle, au milieu de vos grandes occupations, vous exprimez sur le champ vos profondes et subtiles pensées. Je vous supplie de croire que j'honore vos rares talens et que je voudrois que mes actions vous pûssent témoigner mieux que mes paroles à quel point je suis etc.

LXXXVIII.

DIGBY A FERMAT.

MERCREDI 12 DÉCEMBRE 1657.

(*Va*, p. 197.)

MONSIEUR,

Depuis que je me suis donné l'honneur de vous écrire une lettre du 5 de ce mois (2), je reçus celle que vous m'avez fait la faveur de m'écrire du 25 du passé (3), dont je vous rends très-humbles grâces. Elle me fut rendue comme j'étois à table avec Monsieur Frenicle à qui je la montrai et, y ayant papier et encre sur le buffet, je le priai de vous écrire quelque petit mot sur ce que vous y disiez sur son sujet; je vous envoie son écrit.

Il me fait souvenir fort souvent d'un aumônier, qu'avoit le feu roi d'Angleterre, qui étoit un des plus éloquens prédicateurs de son temps et très-subtil théologien; mais, depuis que la guerre fut commencée, il n'y avoit plus moyen de le faire prêcher ou parler de sa science : il n'avoit d'autres idées en son imagination que de machines de guerre

(1) Ces lettres de Digby et de Fermat sont perdues.
(2) La lettre qui précède.
(3) Lettre perdue.

et des stratagèmes pour prendre des villes, en quoi il n'entendoit rien du tout.

Ainsi Monsieur Frenicle ne me veut entretenir d'autre chose que de la théologie mystique et de ses pensées sur le franc-arbitre ou sur la prédestination, quittant le rang qu'il pourroit posséder d'un des plus grands mathématiciens du siècle pour un des moindres théologiens. Car c'est bien tard de commencer la physique et la théologie après l'âge de cinquante ans : je dis la physique, parce qu'il est malaisé d'être un grand théologien si on n'est un solide physicien et si on n'a une véritable connoissance de la nature, dont le sommet sert de base à la grâce.

Mais je dois bien prendre garde de m'engager en ce que j'entends aussi peu et encore moins que lui ; je reviens à ce que je sais de science certaine, dont je vous ferai démonstration évidente toutes les fois que l'occasion s'en présentera, et c'est que je suis etc.

ANNÉE 1658.

LXXXIX.

DIGBY A FERMAT.

MERCREDI 13 FÉVRIER 1658.

(*Va*, p. 197-198.)

MONSIEUR,

Je suis sur le point d'entrer en carrosse pour aller à Rouen, dont je ne crois pas revenir de quinze jours ou trois semaines. C'est pourquoi, dès que j'eus reçu votre paquet du 27 du passé ([1]), j'allai chez M. Clerselier et, n'ayant pas moyen de lui faire faire des copies de vos écrits avant mon départ, je crus que vous trouveriez bon que je les lui confiasse sur la parole qu'il me donna, de vous les rendre fidèlement dès qu'il auroit tiré copie de ce qu'il lui faut. C'est un fort honnête homme et fort votre serviteur; il m'a dit qu'il se donneroit l'honneur de vous écrire par cet ordinaire.

Au reste, Monsieur, quand bien je demeurerois ici, je ne serois pas assez vain pour accepter la charge que vous voudriez m'imposer : elle est trop pesante pour ma foiblesse. Je sais trop bien ([2])

...... quid ferre recusent,
Quid valeant humeri......

pour pouvoir être arbitre entre deux grands personnages; il faut aller

([1]) Lettre perdue, à laquelle étaient jointes des copies demandées par Clerselier pour la publication des Lettres de Descartes. *Voir* Lettre XC ci-après.
([2]) HORACE, *Art poétique*, 39-40.

du pair avec eux. Crassus s'acquitta bien mal de cette fonction entre César et Pompée, n'ayant pas les reins aussi forts qu'eux.

Il est vrai que ceux qui sont dans les vallées peuvent discerner la hauteur des plus grandes montagnes pour en avoir de l'admiration; mais, pour bien juger de ce qu'il y a au sommet de quelqu'une d'elles, il faut être monté aussi haut sur une autre. Vous me permettrez donc de vous dire avec le grossier Palæmon (¹) :

Non nostrum inter vos tantas componere lites.

Et, pour ce qui est de la chaleur avec laquelle vous, Monsieur, et M. Descartes avez soutenu vos sentimens, je ne serois pas d'avis d'en rien ôter ou changer, pourvu qu'il n'y ait rien qui soit offensant, ce qu'on ne peut présumer de deux aussi grands hommes et à quoi M. Clerselier prendra garde. Car, de vouloir étouffer ce petit feu brillant et étincelant, ce seroit ôter beaucoup de la grâce et de la force à une contestation d'esprit et de science, et c'est une des raisons pourquoi les disputes aux Universités des Suisses sont si peu agréables, leur manière d'argumenter étant bien éloignée de la vivacité des bacheliers de la Sorbonne qui pressent avec véhémence et avec chaleur : car cette chaleur provient d'un feu qui ne brûle pas, mais qui semble donner la lumière et la vie comme celle du Soleil.

Je ne saurois m'empêcher de vous envoyer quelques vers que le plus grand génie de notre île pour les Muses (²) écrivit au Chancelier Bacon, qui étoit son grand ami et que vous témoignez être fort le vôtre en le citant souvent. Je vous dirai comment je les ai rappelés en ma mémoire : l'autre jour, m'entretenant avec une personne de grand mérite de vos rares qualités, je lui récitai ces vers y mettant votre nom au lieu de celui de *Baco*. Il en voulut avoir une copie : je la lui fis transcrire par mon secrétaire sur le brouillard que j'en fis à la hâte: il

(¹) Virgile, *Eclog.*, III, 108.

(²) Nous n'avons pu retrouver ces vers ni dans Shakespeare, ni dans aucun des grands poètes contemporains. Au reste, il s'agit probablement d'une pièce latine.

vous en auroit fait aussi une copie s'il eût été chez moi, mais je viens de l'envoyer chez M. l'Ambassadeur d'Angleterre ([1]).

Je suis etc.

XC.

FERMAT A CLERSELIER ([2]).

DIMANCHE 3 MARS 1658.

(Bib. nat. fr. n. a. 3280, f° 35; D. III, 43.)

MONSIEUR,

J'ai reçu votre lettre ([3]) avec les deux copies des écrits de M. Descartes sur le sujet de notre ancien démêlé.

Je voudrois bien, Monsieur, vous satisfaire ponctuellement en ce que vous semblez souhaiter que je refasse mes réponses d'alors qui se sont égarées ([4]); mais, comme je hais naturellement tout ce qui choque tant soit peu la vérité, et qu'il me seroit aussi malaisé de rajuster ce vieux ouvrage qu'à un peintre de refaire mon portrait

([1]) Nous trouvons au vol. 69 de la Correspondance *Angleterre* conservée aux Archives du Ministère des affaires étrangères la preuve que l'ambassadeur d'alors s'appelait Lokard.

([2]) Le texte de cette lettre est établi principalement d'après une copie du temps collationnée à Vienne par Despeyrous et qui présente plusieurs passages inédits publiés par Libri (*Journal des Savants*, 1845, pp. 686-687). — Quoique datée du 3 mars, elle ne fut envoyée, d'après le post-scriptum, que le 10, avec la lettre suivante.

([3]) Lettre annoncée dans la précédente de Digby, et qui est perdue. Les écrits de Descartes sur la Dioptrique qui l'accompagnaient étaient : la lettre à Mersenne (*ci-avant* XXIII) et la lettre à Mydorge (*Desc.*, III, 42). *Voir* plus haut, page 125, note 1.

([4]) Ce langage paraît l'effet d'un malentendu; Clerselier possédait bien les deux lettres de Fermat à Mersenne sur la Dioptrique (*ci-avant* XXII et XXIV), mais il aura cru à des répliques postérieures de Fermat; celui-ci aura compris que les lettres perdues dont on lui parlait étaient celles auxquelles Descartes avait répondu et que nous venons de mentionner. Il n'avait certainement pas rouvert la discussion; toutefois il nous manque des lettres de lui à Mersenne en 1638, où il avait touché incidemment la question de la Dioptrique, comme dans les Pièces XXV *bis*, 1 et XXVI.

d'alors sur mon visage d'à présent, j'ai cru qu'il valoit mieux vous écrire tout de nouveau une lettre qui contiendra mes raisons d'opposition et vieilles et nouvelles, et c'est à quoi je travaillerai pour la huitaine (1).

J'entre dans vos sentiments pour ce qui concerne l'impression; il y faudra changer les termes les plus choquants et les plus aigres, mais n'y faire point autrement de grand changement, et de cela je m'en remets à vous. Monsieur de Carcavi vous fournira sans doute mon traité *de maximis et minimis;* il l'a de toutes façons, c'est-à-dire avec démonstration et sans démonstration, et, puisqu'il est question d'instruire ou de désabuser le public, il sera bon de l'insérer dans votre recueil avec une lettre de M. Milon ou de quelque autre de vos fameux géomètres qui éclaircisse la chose et qui prépare les lecteurs à entendre la dernière lettre de M. Descartes (2), par laquelle il m'écrivit (comme vous verrez) qu'il étoit satisfait de ma géométrie.

Pour la question de Dioptrique, je vous proteste, sans nulle feintise, que je souhaite de m'être trompé; mais je ne saurois obtenir sur moi, en façon quelconque, que le raisonnement de M. Descartes soit une démonstration, et même qu'il en approche. Je vous envoierai dans huit jours la lettre qui éclaircira mes doutes sur cette matière. Et je suis de tout mon cœur, Monsieur, Votre très humble et très obéissant serviteur,

FERMAT.

A Toulouse, ce 3 mars 1658.

J'ai retenu cette lettre, qui étoit prête à vous être envoyée dès la semaine passée, parce que j'ai cru que M. Digby, par la voie duquel j'ai pris la liberté de vous écrire, ne seroit pas encore de retour à Paris. Vous recevrez donc les deux conjointement et, si la seconde est un peu trop longue, assurez-vous, Monsieur, que j'ai mis peine à l'accourcir, et que je pouvois dire beaucoup plus que je n'ai fait. Je

(1) *Voir* la Lettre suivante XC *bis*.
(2) *Voir* Lettre XXXII.

l'ajouterai un jour, si les géomètres de Paris soutiennent la démonstration de M. Descartes.

Il ne sera pas malaisé par les répliques de M. Descartes de supposer ce que j'aurois dit au contraire, et ma dernière < lettre > le contiendra à peu près.

Vous me renvoierez mes écrits ([1]) quand vous voudrez; je n'en ai point de hâte.

XC *bis*.

FERMAT A CLERSELIER.

DIMANCHE 10 MARS 1658.

(D., III, 44.)

MONSIEUR,

1. Les conclusions qui se peuvent tirer de la proposition qui sert de fondement à la Dioptrique de M. Descartes sont si belles et doivent naturellement produire de si beaux effets dans tous les ouvrages de l'art qui regardent la réfraction, qu'il seroit à souhaiter, non seulement pour la gloire de notre défunt ami, mais bien plus pour l'augmentation et embellissement des sciences, que cette proposition fût véritable et qu'elle eût été légitimement démontrée, et d'autant plus qu'elle est de celles dont on peut dire que *multa sunt falsa probabiliora veris*. Je veux même passer plus outre et la comparer à ce fameux mensonge dont il est parlé dans le Tasse, et que ce poète assure être plus beau que la vérité :

Quando sarà il vero
Si bello, che si possa a ti preporre? ([2])

Je commence par là, Monsieur, afin de vous faire connoitre que je

([1]) Il s'agit probablement d'écrits mathématiques conservés d'ailleurs; mais nous ne pouvons préciser lesquels.

([2]) *Jérusalem délivrée*, II, 22 :

Magnanima menzogna, or quando è il vero etc.

serois ravi que le différend que j'ai eu autrefois sur ce sujet avec M. Descartes se terminât à son avantage. J'y trouverois mon compte en toutes façons : la gloire d'un ami que j'ai infiniment estimé et qui a passé avec raison pour un des grands hommes de son temps; l'établissement d'une vérité physique des plus importantes; et l'exécution aisée des effets merveilleux qui s'en pourroient infailliblement déduire. Tout cela me vaudroit incomparablement mieux qu'un gain de cause, quand même je devrois compter pour rien le

Mecum certasse feretur (¹),

dont les amis de M. Descartes peuvent toujours raisonnablement consoler ses adversaires. Je me mets donc, Monsieur, en la posture d'un homme qui veut être vaincu; je le déclare hautement :

Jamjam efficaci do manus scientiæ (²).

Mais, parce que les démonstrations sont des raisons forcées et, qu'à moins d'être convaincu par elles, on n'en sauroit être persuadé, voyons, Monsieur, si le consentement des lecteurs peut échapper à notre auteur, et si nous pourrons nous défaire aisément des objections qui semblent lui pouvoir être opposées. Il faut pour cela suivre sa démonstration mot pour mot, et il suffira d'enfermer par des parenthèses ce qui ne sera point à lui et que j'ajouterai du mien.

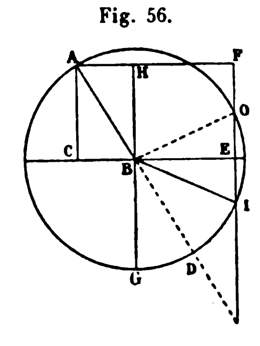
2. Voici donc comme il parle sur la fin de la page 16 de sa Dioptrique françoise (³) :

« Et premièrement, supposons qu'une balle, poussée d'A vers B » (*fig.* 56), rencontre au point B, non plus la superficie de la terre, » mais une toile CBE qui soit si foible et si déliée que cette balle ait la

(¹) Ovide, *Metam.*, XIII, 20.
(²) Horace, *Epodes*, XVII, 1.
(³) Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les Sciences : plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie, qui sont des essais de cette Méthode. A Leyde, de l'imprimerie de Ian Maire, CIↃ IↃ C XXXVII : avec privilège, p. 16 (2ᵉ pagination de l'Ouvrage).

» force de la rompre et de passer tout au travers, en perdant seule-
» ment une partie de sa vitesse, à savoir, par exemple, la moitié. Or
» cela posé, afin de savoir quel chemin elle doit suivre, considérons
» de rechef que son mouvement diffère entièrement de sa détermina-
» tion à se mouvoir plutôt vers un côté que vers un autre, d'où il suit
» que leur quantité doit être examinée séparément; et considérons

Fig. 56.



» aussi que, des deux parties dont on peut imaginer que cette déter-
» mination est composée, il n'y a que celle qui faisoit tendre la balle
» de haut en bas qui puisse être changée en quelque façon par la ren-
» contre de la toile, et que, pour celle qui la faisoit tendre vers la
» main droite, elle doit toujours demeurer la même qu'elle a été, à
» cause que cette toile ne lui est aucunement opposée en ce sens là. »

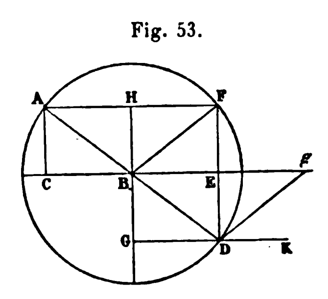
3. (Mais ce raisonnement n'est-il pas un peu opposé au sens commun? L'extension qu'il en fait de la réflexion à la réfraction n'est-elle pas aussi un peu forcée? En la page 13, il suppose que la balle va toujours d'égale vitesse, tant en descendant qu'en remontant, qu'elle continue son mouvement dans un même milieu (¹); il en déduit, en la page 15, que la rencontre de la terre (²) peut bien empêcher la détermination qui faisait descendre la balle d'A vers CE, à cause qu'elle

(¹) « Mais afin de ne nous embarrasser point en des nouvelles difficultés, supposons que la terre est parfaitement platte et dure, et que la balle va tousjours d'esgale vitesse, tant en descendant qu'en remontant... »

(²) « Et en suite il est aysé à entendre que la rencontre de la terre ne peut empescher que l'une de ces deux déterminations et non point l'autre en aucune façon. »

occupe tout l'espace qui est au dessous de CE, mais qu'elle ne peut point empêcher l'autre qui la faisoit avancer vers la main droite, vu qu'elle ne lui est aucunement opposée en ce sens-là; d'où il infère l'égalité des angles de réflexion et d'incidence.

Fig. 53.



Mais quand bien ce raisonnement seroit véritable en la réflexion, quelque sceptique scrupuleux ne manquera point d'alléguer qu'il y a trois circonstances en la réfraction qui doivent changer la conséquence, ou du moins servir d'empêchement à la recevoir sans nouvelle preuve :

Premièrement, en la figure de la page 17 ou en celle de la page 18 [1], la balle ne continue pas son mouvement d'une égale vitesse, puisque, par la supposition, elle perd, par exemple, la moitié de sa vitesse dès le point B.

Secondement, elle ne passe pas toujours par un même milieu, comme il paroit en la figure de la page 18.

Et enfin la détermination qui la faisoit aller de haut en bas n'est pas tout à fait empêchée par la rencontre de la toile ou de l'eau, mais changée seulement ou diminuée.

Or, que la conséquence soit la même nonobstant la diversité de ces trois circonstances, il sera malaisé qu'un médiocre logicien le puisse accorder. Il alléguera pour excuse de sa logique scrupuleuse, qu'il n'a pas cru se faire grande violence, lorsqu'en la figure de la page 15 (*fig.* 53) il a donné les mains que la détermination de la

(1) A ces figures correspond celle que nous avons reproduite plus haut sous le n° 56, d'après l'édition des Lettres de Descartes, de Clerselier.

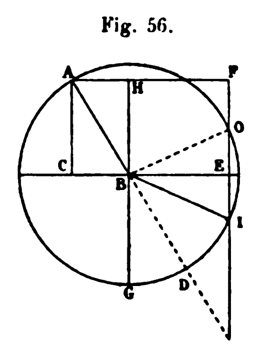
gauche à la droite restoit la même, puisque la balle allant toujours de même vitesse pouvoit conserver l'une de ses visées ou déterminations lorsque l'autre seule étoit empêchée; que d'ailleurs le mouvement se faisoit dans un même milieu; et qu'enfin, la détermination de haut en bas étant entièrement empêchée, il n'y avoit pas grand mal de consentir que celle de la gauche à la droite restât tout entière : comme, quand on perd un œil, on dit que la vertu visive se conserve entière en celui qui reste.

Mais, en la réfraction, tout y est différent. Veut-on y obtenir le consentement de notre sceptique sans preuve? La détermination de la gauche à la droite demeurera-t-elle la même, lorsque toutes les raisons qui le lui avoient persuadé en la réflexion se sont évanouies? Mais ce n'est pas tout : il a sujet d'appréhender l'équivoque et, lorsqu'il aura accordé que cette détermination de gauche à droite demeure la même, il a occasion de soupçonner que l'auteur le chicanera sur l'explication de ce terme. Car, quoiqu'il ait protesté que la détermination est différente de la puissance qui meut, et que leur quantité doit être examinée séparément, si notre sceptique lui accorde en cet endroit que cette détermination de gauche à droite demeure la même en la réfraction, c'est-à-dire qu'elle conserve la même visée ou direction, il y a apparence que l'auteur voudra l'obliger ensuite à lui accorder que la balle, dont la détermination vers la droite n'est point changée, s'avance autant et aussi vite vers la droite qu'elle faisoit auparavant, quoique sa vitesse et le milieu par où elle passe soient changés.

Mais parce qu'il ne paroit pas sitôt qu'on veuille lui faire une si grande violence, il ne croit pas être encore temps de se départir du respect qu'il doit au nom de M. Descartes, et il veut bien lui avouer, sur sa seule parole, que cette détermination vers la droite demeurera la même, pourvu qu'il ne se parle point du temps que la balle doit employer à s'avancer de ce côté là : parce que M. Descartes même a avoué que la force qui meut et la détermination sont deux quantités qui n'ont rien de commun, et qu'elles doivent être séparément examinées ».

4. « Puis, ayant décrit du centre B le cercle AFD et tiré à angles droits sur CBE les trois lignes droites AC, HB, FE, en telle sorte qu'il y ait deux fois autant de distance entre FE et HB qu'entre HB et AC, nous verrons que cette balle doit tendre vers le point I. Car, puisqu'elle perd la moitié de sa vitesse en traversant la toile CBE, elle doit employer deux fois autant de temps à passer au-dessous, depuis B jusques à quelque point de la circonférence du cercle AFD, qu'elle

Fig. 56.



a fait au-dessus, à venir depuis A jusques à B. Et, puisqu'elle ne perd rien du tout de la détermination qu'elle avoit à s'avancer vers le côté droit, en deux fois autant de temps qu'elle en a mis à passer depuis la ligne AC jusques à HB, elle doit faire deux fois autant de chemin vers ce même côté (¹). »

5. (C'est ici le guet-apens, et la trop grande crédulité de celui qui avoit franchi tous ses scrupules sur le premier article, reçoit en cet endroit une nouvelle attaque. L'auteur a sujet d'espérer que, puisque notre sceptique lui a déjà accordé que la détermination vers la droite restoit la même, il ne doit pas le dédire non plus, que cette détermination ou cette visée et direction vers le côté droit ne soit également vite et n'avance toujours autant qu'elle faisoit auparavant.

Mais le sceptique commence à n'entendre plus raillerie et, s'il a consenti de bonne foi que la détermination vers la droite ne changeoit

(¹) Discours de la méthode, etc. A Leyde, CIϽ IϽ CXXXVIII, p. 18 (2ᵉ pagination).

pas, il proteste qu'il n'est point engagé à consentir qu'en changeant de milieu elle fasse toujours un égal progrès, puisque l'auteur a si souvent et si solennellement assuré que la détermination et la force mouvante sont tout à fait différentes et distinctes; et pour se confirmer en son doute, il ajoute que si, dans la figure de la page 17, la balle étoit poussée depuis H jusques à B, et qu'elle continuât son mouvement vers BG, le raisonnement de celui qui diroit :

« La détermination de la balle sur la route HBG n'est point changée au point B, car elle est la même, et le mouvement perpendiculaire se continue dans la même ligne HBG; donc cette balle avance autant et aussi vite au dessous de B qu'elle faisoit auparavant. »

ce raisonnement, dis-je, seroit ridicule, parce que la détermination ou direction du mouvement diffère de sa vitesse.

Pourquoi donc notre sceptique sera-t-il obligé d'accorder gratuitement et sans preuve que le mouvement qui se fait vers la droite dans la figure de la page 18 avance également vers le dit côté droit, après qu'il a changé de milieu? Ce n'est pas que cette proposition ne puisse être vraie, mais elle ne l'est qu'au cas que la conclusion que M. Descartes en tire soit véritable, c'est-à-dire que la raison ou proportion pour mesurer les réfractions ait été par lui légitimement et véritablement assignée. Il ne l'a donc pas prouvée par une proposition si douteuse et si peu admissible.

En un mot, quand toutes les oppositions qu'on peut faire à son raisonnement seroient fautives, peut-il faire passer pour véritable ce qui n'est ni axiome, ni déduit par une conséquence légitime d'aucune première vérité? Les démonstrations qui ne forcent pas de croire ne peuvent point porter ce nom.)

Et croiriez-vous, Monsieur, que si la proposition de M. Descartes étoit démonstrativement prouvée, son évidence et sa clarté n'eussent pas percé les ténèbres de mon entendement, pendant vingt années qui se sont écoulées depuis notre ancien démêlé, puisque je vous ai protesté, dès le commencement de ma lettre, que je travaille sincèrement

à me tirer d'erreur, et que je ne cherche qu'un honnête prétexte à me rendre? Je serois même ravi d'établir l'honneur de M. Descartes aux dépens du mien, et je voudrois, s'il m'étoit possible, en reconnoissant la vérité de sa preuve, ajouter avant que de finir :

Se clara videndam
Obtulit et pura per noctem in luce refulsit (1).

Il en sera pourtant ce que M. le chevalier Digby et vous, Monsieur, trouverez bon. Je vous soumets à tous deux ma logique et ma mathématique, et je consens à ce que vous en fassiez un sacrifice à la mémoire de cet illustre, qui n'est plus en état de se défendre; mais, jusques à ce que vous ayez prononcé, je prétends que la véritable raison ou proportion des réfractions est encore inconnue et que θεῶν ἐν γούνασι κεῖται (2), en compagnie de tant d'autres vérités que l'avenir découvrira peut-être mieux que n'a pu faire le passé.

Excusez ma longueur et faites moi l'honneur de me croire, Monsieur, Votre très humble et très affectionné serviteur,

Fermat.

XCI.

FERMAT A DIGBY.

DIMANCHE 7 AVRIL 1658.

(*Comm. ep.*, 37.)

Monsieur,

1. J'ai reçu les nouvelles solutions de la proposition (3) de Monsieur Wallisius, que Monsieur Frenicle a ajoutées aux premières. Je

(1) Virgile, *Énéide*, II, 589-590.
(2) Homère, *Iliade*, XVII, 514.
(3) « Trouver deux nombres entiers carrés tels que les sommes formées par chacun d'eux et par ses parties aliquotes soient égales. »
Cette question avait été proposée par Wallis dans sa Lettre à Digby du 21 novembre 1657 (*Comm.* 16). Les solutions de Frenicle sont dans sa Lettre à Digby (*Comm.* 31) que Brouncker reçut le 5 avril 1658.

suis ravi, aussi bien que vous, de l'abondance et fertilité de son esprit et de la grande facilité qu'il s'est acquise en ces matières. Je m'étois contenté de donner deux solutions en nombres premiers entre eux, et avois seulement indiqué qu'on pouvoit, par ma méthode, étendre la question à trois, quatre, cinq et plusieurs nombres de même nature. Mais, puisque Monsieur Frenicle m'a si avantageusement préoccupé, je n'ajoute plus rien à son travail, et je consens que ma petite et maigre solution demeure en vos mains.

2. Après avoir reçu la lettre de Monsieur Wallisius (1), je suis toujours surpris de quoi il méprise constamment tout ce qu'il ne sait pas. Les questions en nombres entiers ne sont point de son goût. Il s'imagine que je ne sais point les centres de gravité des hyperboles infinies, et il semble promettre sur la fin la quadrature de l'hyperbole, c'est-à-dire de celle d'Apollonius : car, pour toutes les autres, ni lui ni moi ne l'ignorons pas.

Je lui réponds succinctement :

3. Premièrement à ce qu'il dit que je fais grand cas des propositions négatives, comme qu'il n'y a que le seul quarré 25 qui, ajouté à 2, fasse un cube en nombres entiers; et encore qu'il n'y a que les deux quarrés 4 et 121 qui, ajoutés à 4, fassent des cubes, aussi en entiers (2). Il dit que ce sont des propositions ordinaires et *neque majus quid aut grandius insinuant quam si dicerem cubicubum nullum in integris esse vel etiam quadratum qui, numero* 62 *junctus, efficiat quadratum, ... vel etiam nullos in integris cubos esse qui ab invicem distent numero vicenario nec, præter* 8 *et* 27, *qui distent numero* 19, *etc.; ..., cujusmodi innumeras determinationes negativas in promptu esset comminisci.*

Je réponds que je ne fais point cas de toute sorte de propositions négatives; par exemple, celles qu'il rapporte et infinies de telle nature ne sont que des amusements d'un arithméticien de trois jours, et leur

(1) Lettre 16 du *Commercium epistolicum*. (*Voir* la note qui précède.)
(2) *Voir* Lettre LXXXIV, 5.

raison est d'abord connue *etiam lippis et tonsoribus* (1). De sorte que d'en inférer de là qu'il faut faire peu de compte de toutes sortes de propositions négatives, voyez, Monsieur, quelle logique! Mais je ne veux point d'autre preuve que celles que je vous ai proposées sont du haut étage et dignes d'être recherchées, c'est que ni lui, qui s'estime tant, ne les a pas encore démontrées, ni Monsieur Frenicle même, que je mets au-dessus de lui, sans lui faire tort; et ce dernier, qui connoît merveilleusement les mystères les plus cachés des nombres, ne les a pas méprisées.

4. Mais, parce que les nombres entiers ne plaisent pas à Monsieur Wallisius, en voici une autre, à laquelle il pourra s'occuper et en laquelle je n'exclus point les fractions (2) :

Il n'y a aucun triangle rectangle en nombres dont l'aire soit quarrée.

5. Et, pour lui faire voir que le défaut de connoissance de cette sorte de questions lui fera quelquefois concevoir plus grande opinion de ses forces qu'il n'en doit raisonnablement avoir, il dit qu'il ne doute point que le Mylord Brouncker ne résolve les deux questions (3) :

Datum numerum cubum in duos cubos rationales dividere,

et

Datum numerum ex duobus cubis compositum in duos alios cubos rationales dividere;

je lui réponds qu'il pourra, par aventure, ne se mécompter pas en la seconde, quoiqu'elle soit assez difficile, mais que, pour la première, c'est une de mes propositions négatives que ni lui ni le Seigneur Brouncker ne démontreront peut-être pas si aisément. Car je soutiens qu'*il n'y a aucun cube en nombres qui puisse être divisé en deux cubes rationaux.*

(1) Horace, *Sat.* I, vi, 3.
(2) Problème impossible. — Observation XLV sur Diophante.
(3) *Voir* Lettre LXXXIV, 4 et 8. — Observations II et IX sur Diophante.

Pour la seconde question, elle n'est pas d'une extrême difficulté et, pour lui témoigner que je veux même la lui proposer en cas des plus aisés en prenant un petit nombre, je me contente que lui ou Mylord Brouncker divisent le nombre 9, qui est composé des deux cubes 8 et 1, en deux autres cubes rationaux. S'il rejette cette proposition, qui n'est pas des plus difficiles, je n'oserai plus leur en proposer ni en entiers ni en fractions.

6. Pour son canon *ad inveniendos quadratos qui, ducti in datum numerum non quadratum, adscita unitate, conficiant quadratum,* je ne sais pas pourquoi il doute que cette invention nous paroisse malaisée, puisqu'il n'est point d'algébriste novice qui ne trouve sa règle d'abord. Mais ma question *en entiers* est si fort au dessus de ces petites règles *de trivio,* que M. Frenicle l'a jugée digne de l'occuper, et c'est tout dire. Il a si exactement répondu à tout le reste qui regarde les questions numériques que j'aurois tort d'ajouter quelque chose du mien à ses réponses ([1]).

7. Pour ce qui regarde les centres de gravité des hyperboles infinies et la règle pour distinguer celles qui en ont de celles qui n'en ont pas < je répondrai > que je l'avois résolu pleinement et envoyé tant à Torricelli qu'aux géomètres de Paris dix ans avant l'impression du livre *Arithmetica infinitorum* ([2]). S'il ne m'en veut pas croire, les Roberval et les Pascal, qui ont toutes mes propositions sur ce sujet depuis plusieurs années, le pourront désabuser.

8. La promesse qu'il fait sur la quadrature de l'hyperbole s'exécutera sans doute comme celle du cercle : la voie qu'il tient en se servant de certaines progressions, *inter quorum terminos interpolationem quærit,* est de ces méthodes qui aboutissent à trouver une chose aussi difficile que celle qu'on a pour but de chercher. *Obscurum autem*

([1]) Digby avait tout d'abord communiqué à Frenicle la lettre de Wallis du 21 novembre 1657 et Frenicle avait rédigé en réponse une épître latine à Digby, datée du 3 février 1658 (*Comm. ep.*, **22**).

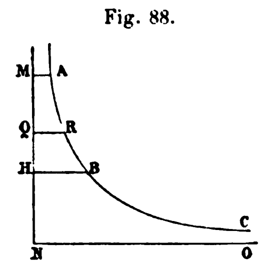
([2]) *Voir* Lettre LXXXII, **2**.

explicare per obscurius, matæotechnia est, comme a très bien dit notre Viète (1).

Mais pour lui faire voir que je ne manque pas de théorèmes effectifs et très beaux en la véritable hyperbole d'Apollonius, voici un problème dont je puis donner la construction.

Soit (*fig.* 88) l'hyperbole d'Apollonius ABC, ses asymptotes MNO; soient tirées les deux parallèles à NO, les droites MA, HB. Je propose la figure AMHB contenue sous l'hyperbole et sous les droites AM, MH, HB. Il la faut diviser < par > une parallèle aux bases comme QR, en sorte que le segment RQHB soit au restant AMQR en raison donnée.

Fig. 88.



Ce problème sera construit par moi bien plus tôt que M. Wallisius ne donnera la quadrature de l'hyperbole d'Apollonius.

En voilà de reste pour ce coup. Ce n'est pas pour faire un démêlé formel avec M. Wallisius, mais c'est seulement pour me justifier à vous, consentant que vous ne lui envoyiez que ce qu'il vous plaira du contenu en cette lettre. Je ne réponds pas aux dernières réponses, parce que ce n'est pas moi qui lui avois fait les objections auxquelles il répond.

Je suis, Monsieur, Votre très humble et très obéissant serviteur.

Fermat.

A Toulouse, le 7 avril 1658.

(1) Viète, *Ad Adriani Romani problema responsum*, Cap. V. — Édition Elzevir: Leyde, 1646, p. 309. — Le mot *autem* a été ajouté par Fermat.

XCII.

DIGBY A FERMAT.

MERCREDI 15 MAI 1658.

(*Va*, p. 198-200.)

ILL^MO SIG. PADRON COL^MO,

Avrei temuto d'infastidire troppo V. S. Illustrissima con nuova lettera, se la sua ultima delli 4 del corrente non m'avesse recata cagione (quantunque in soggetto di poco rilievo) di renderle qualche picciola servitù o più presto ossequio e conformità alli suoi commandi; avendo imparato dal savio che, come c'è tempo di parlare, vi lo è anche del silenzio; e dallo spiritoso Poëta Tosco (¹), che

Il silentio ancor suole
Haver prieghi e parole.

Ma lei avendomi fatto l'onore d'ordinarmi di mandarle un de' miei libri della Physica in Inglese (²), non l'ho voluto lasciar andare senza accompagnamento di queste poche righe, per ringraziarla della sua tanta compiacenza in dire che ha intento di trascorrerlo, per avvezzarsi così alla nostra rozza favella; rozza in quant'al suono ed ingrata all' orecchia non avvezza ad essa, ma forse, quanto alla copia, proprietà, ed energia dell' espressioni, ed all' eleganza e politezza in ogni altro genere, che non cede punto alle più eleganti e stimate, nè delle volgari, nè delle dotte, che abbino mai avuto prattica nel mondo, e che nelle poesie che abbiamo, non solo va del pari, ma avvanza di gran lunga li migliori o Toscani, o Latini, o Greci; eccettuando però nell' Eroica Omero e Virgilio, i quali dui, senza contrasto, son fuori

(¹) Nous n'avons pu retrouver l'auteur de ces beaux vers.

(²) Il s'agit sans doute du premier des *Two treatises* cités ci-dessus, page 340, note 1. Digby parle plus loin d'une traduction (latine?) de ce Livre, faite à Paris, mais elle ne paraît pas avoir été imprimée. Était-elle entre les mains de Fermat, qui ne savait pas l'anglais?

d'ogni comparazione con tutti de i secoli dopo loro, e però prudentemente fece quel Grammatico ardito Giulio Scaligero (che maggior epiteto non gli posso conceder io, quantunque i pedanti moderni gl' affigghino il titolo invidioso di divino Critico), che in vece di far censura dell' ultimo e forse il minore di essi, gl' eresse un altare. Onde veramente alle volte lamento la sorte che ci ha fatti

Penitus toto divisos orbe Britannos [1].

poi che abbiamo parecchie composizioni poetiche le quali meritarebbono la luce ed il godimento universale, e per le quali capire, ho conosciuto quattro persone di spiriti sublimi ed ingegnosissimi (dui Francesi, e dui Italiani), che per aver visto delle grossiere interpretazioni in prosa di certi carmi Inglesí, si sono applicati con fervore a studiare nostra lingua, per bever alla schietta fonte delle nostre acque, le quali hanno poi confessato avergli più sedato la loro sete in simile materia, che qualsivoglia abondante fiume di altra regione in terra ferma. Per conformarmi dunque al voler di V. S. I., ho messo in mano del messaggiero di Tolosa lunedì passato un involto contenendo il mio detto libro, del quale veramente non ne aveva più copia appresso di me, avendo per ciò scritto in Inghilterra, dove è stato ristampato questo trattato tre o quattro volte in ambedue le Università di Oxonio e Cantabrigia; e poi che lei si vuole penare di dar un' occhiata a questo mio componimento, mi rallegro molto che ciò sia nella lingua nella quale io l'ho conceputo, per esser che quantunque il traduttore sia stato uomo dottissimo, e la sua traduzione essaminata per tutto il Collegio dei Dottori Inglesi di questa Città, tutti valenti Teologi i quali la fecero fare per servir allo studio di tutti i loro seminarii, nientedimeno egli è cosa certa, che ci è gran differenza tra l'original ed il transcritto, in quanto al vigor dell'espressione, e credo che dopo aver vissuto sempre in nostra corte polita, e conversato continuamente co'l Bacone, il Seldeno e altri maggiori lumi della

[1] Virgilii *Eclog. I*, v. 67.

nostra Patria, non si stimarebbe vanità in me s'io mi attribuissi lo scriver correttamente in Inglese. E quando io feci il primo disegno di questo discorso, godevo di tranquillità assai per spiegar con maggior chiarezza ciò che voleva dire, essendo che lo feci nello spazio di quelli quasi dui anni ch'io fui continuamente su'l mare : durante il quale è ben vero che quasi ogni giorno ebbi occasione di prepararmi a combattere con la mia flotta (essendo nel mar Mediterraneo circondata dalle forze Francesi e Spagnuole ([1]), con chi avevamo allora guerra, e anche dalle Vineziane), nientedimeno mi avvanzava tanto tempo, che se non fosse stato che per evitar il tedio (ancorchè il comando del Re fu il mio primo motivo), mi accingevo ogni giorno con premura a metter qualche cosa in carta, di modo che posso con ragione dire come quel più dotto e gentil cavagliero di tutta la nazion Castigliana e prencipe de' loro Poeti, Garcilasso de la Vega ([2]) :

Entre las armas del sangriento Marte
Hurtè del tiempo esta breve suma,
Tomando hora la spada, hora la pluma.

Ma poi che lei si degna voler veder de i meschini parti del mio sterile ingegno, ho volsuto farle parte ancora d'un altro trattaticiuolo che ho composto intorno all' infallibilità della Religione Catolica, per dar soddisfazione a un' de' maggiori genii ch' io abbia mai conosciuto; e che finalmente l'ha convinto ([3]). Perchè lui non si contentava di considerar Iddio come un Legislatore, che volesse dimostrare il suo potere con dar premii o pene secondo una volontà imperiosa, senza motivo ragionevole fondato in natura, e però bisognò penetrar nella Filosofia

([1]) Les croisières de Digby dans la Méditerranée avec deux bâtiments armés en course remontaient à 1628.

([2]) Ces vers se trouvent dans l'Églogue III. Digby supprime entre le premier et le second le vers suivant :

Do apenas hay quien su furor contraste

(*Obras de Garcilaso de la Vega illustradas con notas*. En Madrid, MDCCLXXXVIII, p. 97-98).

([3]) « A Discourse concerning Infallibility in Religion, written by sir Kenelme Digby to the Lord George Digby, eldest sonne of the Earle of Bristol ». Paris, 1652, in-12.

della Religione, e perchè essa sia necessaria a gl' uomini. In una parola, bisognò combattere in lui tutte le maggiori forze de' più dotti Sociniani (la più terribil' setta d'Eretici che sia mai stata), nel che fare ho qui impiegato tutto'l vigore del mio debbole ingegno in una strada non calcata d'altri, e tutte le piu squisite espressioni che so della lingua nostra, e non ne feci stampare se non 30 copie per dar ad amici confidenti. Gli mando ancora un altro trattato Inglese, che ha fatto gran romore in Inghilterra e che molti vogliono attribuire a me, ancor che sia sotto il nome del Signor Bianchi (conosciuto sotto titolo di Thomas Anglus), per esser che i sentimenti dell'Autor e li miei siano precisamente gl'istessi ([1]). Dimando perdono de'l mio tanto importunarla, e la riverisco, etc.

XCIII.

CLERSELIER A FERMAT ([2]).

MERCREDI 15 MAI 1658.

(D., III, 45; Bibl. Nat. fr. 3280, n. acq., f^os 43-50.)

Monsieur,

1. Je ne veux pas m'arrêter beaucoup à vous faire des excuses d'avoir tant tardé à faire réponse aux deux vôtres, l'une du 3^e et l'autre du 10^e mars dernier, pource que je me persuade que vous croirez aisément qu'il m'a fallu des obstacles invincibles pour m'empêcher de satisfaire à temps à des témoignages si obligeans de votre suffisance et de votre civilité. En effet, une maladie qui m'a détenu dans le lit presque tout ce temps-là, et qui m'a ôté le moyen de pou-

([1]) Thomas White, en dehors de ses ouvrages latins, publiés sous le nom de *Thomas Anglus*, a composé un grand nombre de Traités en anglais. Digby désignait peut-être celui qui parut à Londres en 1655, sous le titre : *The Grounds of Obedience and Government*.

([2]) Réponse à la Lettre XC *bis*.

voir occuper mon esprit à des considérations si relevées, est la véritable cause qui m'a empêché de vous témoigner plus tôt ma reconnoissance.

Mais tout cela seroit peu, si je pouvois aujourd'hui répondre à tous les doutes de votre sceptique, et satisfaire pleinement aux difficultés que vous proposez dans votre dernière; car, comme elles ne dépendent point du temps, la réponse n'en seroit de rien moins meilleure et convaincante, pour n'être pas venue à temps. Néanmoins, pourvu que ce soit à vous, Monsieur, que j'aie affaire, et non point à votre sceptique, dont l'humeur seroit trop difficile à contenter, je me promets de pouvoir éclaircir la plupart de ses doutes, et de faire voir, si je ne me trompe, si clairement en quoi il s'est mépris dans ses raisonnemens, que, vous prenant vous-même pour l'arbitre de nos différens et pour le juge de nos conclusions, j'espère que vous reconnoîtrez la subtilité des siennes et la vérité des miennes, c'est-à-dire de celles de M. Descartes.

2. Premièrement, je ne vois point que le raisonnement que fait M. Descartes, à l'occasion de sa figure [1] de la page 17 de sa Dioptrique, soit aucunement opposé au sens commun, ni que l'extension qu'il en fait de la réflexion à la réfraction soit forcée. Car la même raison qui lui a fait conclure en la page 15 que la terre CBE [2] ne pouvoit empêcher que la détermination de haut en bas, et non point celle de gauche à droite, pource qu'elle est entièrement opposée à la première et point du tout à la seconde, la même lui a dû faire conclure, dans la figure de la page 17 ou 18, que la détermination de haut en bas pouvoit bien être changée en quelque façon par la rencontre de la toile ou de l'eau, mais point du tout celle qui fait tendre la balle vers la main droite, à cause que l'eau ou la toile est en quelque façon opposée à l'une et point à l'autre.

Je vous prie de remarquer ici la façon de parler de M. Descartes (car

(1) *Voir* fig. 56, page 369.
(2) *Voir* fig. 53, page 370.

c'est de là que dépend en partie la solution de tous les doutes de votre sceptique) : il ne dit pas simplement que la détermination de haut en bas peut être changée par la rencontre de la toile, mais seulement qu'elle peut être changée *en quelque façon* (¹).

Car en effet elle n'est pas tout-à-fait changée, puisque la balle continue de descendre, mais elle est changée en quelque façon, en tant que c'est changer en quelque façon la détermination qu'un mobile avoit à avancer vers un certain côté, que de faire que dans le même temps il n'avance pas tant vers ce côté-là qu'il faisoit auparavant : ce qui change la quantité de sa détermination.

3. De plus, les trois circonstances que remarque votre sceptique, pour l'empêcher d'admettre cette conséquence, ne la peuvent aucunement infirmer. Car, que la vitesse soit diminuée, que le milieu soit changé, et que la détermination de haut en bas ne soit pas tout-à-fait empêchée, mais que la balle continue de descendre, tout cela ne doit point apporter de changement à la détermination de gauche à droite, à laquelle pas une de ces circonstances ne s'oppose et ne met obstacle, puisque cette détermination peut demeurer la même quoique la vitesse soit changée, une même détermination pouvant être jointe à différentes vitesses.

Le milieu ne peut aussi apporter aucun changement à cette détermination, puisqu'il lui est également facile de s'ouvrir et faire passage d'un côté que d'un autre dans le milieu qu'elle parcourt. Et bien que la balle continue de descendre et qu'elle ne remonte pas comme en la réflexion, cette détermination vers la main droite se peut aussi bien faire et maintenir en descendant qu'en remontant.

Jusques ici votre sceptique auroit, ce me semble, tort de ne vouloir pas accorder que la détermination de gauche à droite demeure la même en la réfraction, après en être demeuré d'accord sans difficulté en la réflexion. Et il ne doit point appréhender qu'on le chicane sur l'explication de ce terme, et qu'on l'oblige à rien avouer qu'on ne

(¹) *Voir* le texte de Descartes, page 369.

prouve et qui ne soit tiré, par une conséquence légitime, de ce qu'on a avancé auparavant, M. Descartes ayant trop soigneusement fait remarquer la différence qu'il y a entre la détermination et le mouvement, ou, comme vous dites, la puissance qui meut, pour s'en oublier.

4. Mais voici le point qui effarouche votre sceptique, et qui lui fait perdre ce peu de respect qu'il sembloit encore porter au nom de M. Descartes. C'est à ce coup qu'il dit n'entendre plus raillerie, et que, s'il a consenti de bonne foi que la détermination vers la droite ne changeoit pas, il proteste qu'il n'est point engagé à consentir que la balle, changeant de milieu, fasse toujours un égal progrès et, comme il dit un peu auparavant, aille aussi vite vers la droite, après qu'il a été supposé que la balle au point B perd la moitié de sa vitesse, et que M. Descartes a si solennellement assuré que la détermination et la force mouvante sont tout-à-fait différentes et distinctes.

Mais ne voyez-vous pas que ce qui empêche votre sceptique de donner les mains à cela est qu'il ne distingue pas assez lui-même la détermination d'avec la force mouvante ou la vitesse, et qu'il les confond ensemble, croyant que la division ou la perte que l'une souffre, à savoir la vitesse, se doive ressentir par l'autre, à savoir par la détermination vers la main droite, quoique rien ne se soit opposé qui ait pu changer ou diminuer la quantité de la détermination que la balle avoit à avancer vers ce côté-là? Car, s'il avoit bien pris garde à ce que dit M. Descartes, il n'auroit pas de peine à comprendre que, la vitesse étant diminuée de moitié [au point B], la détermination de gauche à droite demeurant toujours la même [en ce point-là] qu'elle a été [auparavant], il est nécessaire, pour accorder cette vitesse à cette détermination, que la balle suive la ligne BI.

Et quoique, dans la route qu'elle prend, en des temps égaux, elle fasse autant de chemin ou qu'elle avance autant vers la droite qu'elle faisoit auparavant, et qu'ainsi elle conserve toujours la même détermination qu'elle avoit à avancer vers [ce côté] là, il ne s'ensuit pas

qu'elle aille aussi vite qu'elle faisoit auparavant (ce que votre sceptique semble avoir toujours appréhendé qu'on lui voulût faire accorder), puisque M. Descartes avoue lui-même qu'il lui faut le double de temps pour faire autant de chemin qu'auparavant. Mais comme, dans la route qu'elle est obligée de prendre, elle incline plus qu'elle ne faisoit vers la droite, elle ne laisse pas d'avancer autant vers ce côté-là, quoiqu'elle aille deux fois moins vite.

Et c'est à mon avis ce qui fait la beauté et la force tout ensemble du raisonnement de M. Descartes, de faire voir quelle doit être dans cette rencontre la route véritable que doit prendre la balle, qui ne peut être autre que celle qu'il a expliquée en ce lieu-là, pour se rapporter à la détermination vers la droite qu'elle doit garder, et à la perte de la vitesse qu'elle a soufferte en B.

5. Mais ce qui le plus a abusé votre sceptique est un raisonnement très spécieux à la vérité, et très capable de surprendre les autres et de faire qu'on y soit surpris soi-même, si l'on n'y prend garde, mais qui pourtant est faux et contre l'intention de M. Descartes. Ce raisonnement est que, comme M. Descartes sur la figure de la page 17 dit que, la détermination vers le côté droit étant la même, quoique le mouvement de la balle soit diminué de moitié au point B, en deux fois autant de temps elle doit avancer deux fois autant vers la droite (¹), donc *a pari*, dit votre sceptique, posé que la balle soit poussée perpendiculairement depuis H jusques à B et qu'elle continue son mouvement vers BG, la détermination de la balle sur la route BG n'étant point changée au point B et demeurant la même, puisque le mouvement perpendiculaire se continue dans la même ligne HBG, en deux fois autant de temps elle doit avancer deux fois autant, et aussi vite au dessous de B qu'elle avoit fait auparavant au dessus : ce qui est absurde, puisque l'on suppose que la balle au point B a perdu la moitié de sa vitesse.

Véritablement, si la conséquence qu'il infère étoit bien tirée de ce

(¹) *Voir* le texte de Descartes, page 372.

qu'a avancé M. Descartes, je conclurois comme lui que M. Descartes se seroit trompé dans son raisonnement, duquel il s'ensuivroit une telle absurdité.

Mais aussi M. Descartes dit tout autre chose que ce que votre sceptique lui veut faire dire : car, quand il a dit que la détermination qu'avoit la balle à avancer vers le côté droit demeuroit la même, et que par conséquent en deux fois autant de temps elle devoit faire deux fois autant de chemin vers ce côté-là, il a conclu cela de ce que, bien qu'on suppose que la balle au point B perde la moitié de sa vitesse, néanmoins elle ne perd rien du tout de la quantité de la détermination qu'elle avoit à s'avancer vers le côté droit, à laquelle la toile n'est aucunement opposée en ce sens-là, et à laquelle se doit et se peut accommoder la vitesse qui reste en la balle (car autrement la balle rejailliroit au lieu de pénétrer la toile), pour faire en sorte que sans déroger à la perte qu'elle a soufferte et qu'allant moins vite, elle ne laisse pas d'avancer autant vers le côté droit qu'elle eût fait si elle n'eût rien perdu de sa vitesse.

Mais peut-on dire la même chose de la détermination d'une balle que l'on suppose tomber perpendiculairement sur la même toile, à savoir que la superficie sur laquelle elle tombe ne lui est aucunement opposée en ce sens-là, et qu'en perdant la moitié de sa vitesse, elle ne perd rien du tout de la quantité de la détermination qu'elle avoit à s'avancer vers le côté où elle visoit, et que la vitesse qui lui reste se doit et se peut accommoder avec cette détermination, pour la faire avancer en un temps égal sur la même route autant qu'elle eût fait si elle n'eût rien perdu de sa vitesse? Certainement personne ne dira que ce cas soit semblable au premier, et par conséquent la conclusion n'en peut être pareille.

6. Aussi tout le défaut [du raisonnement] de votre sceptique ne vient que de ce qu'il n'a pas pris garde que la même superficie CBE, en laquelle la balle au point B perd la moitié de sa vitesse, est aussi en même temps opposée à la détermination de haut en bas, soit qu'elle

soit perpendiculaire ou non. En sorte que, quoique la balle continue de descendre et même qu'elle descende dans la même ligne quand elle a été poussée perpendiculairement, on ne sauroit pas dire que cette détermination vers le bas soit la même, mais elle est changée en quelque façon, ainsi que dit M. Descartes. Car la balle ne descend plus avec la même quantité de détermination, puisque dans un temps égal elle ne va pas si loin qu'elle étoit déterminée d'aller avant qu'elle eût perdu la moitié de sa vitesse, ce qui est un changement en la détermination qu'elle avoit à avancer vers ce côté-là.

Et si vous y prenez garde, tous les changemens de détermination que M. Descartes a dit s'ensuivre en la balle du changement de sa vitesse ou de la force qui la pousse ou qui l'arrête en B (selon les différentes suppositions qu'il fait), ont tous été en la détermination de haut en bas, et non point en celle de gauche à droite, à cause, comme il dit en la page 17, ligne 13 [1], que des deux parties dont on peut imaginer que la détermination de la balle sur la route AB est composée, il n'y a que celle qui faisoit tendre la balle de haut en bas qui puisse être changée en quelque façon par la rencontre de la toile. Mais, à plus forte raison, cette toile peut-elle faire changer la détermination perpendiculaire à laquelle elle est entièrement opposée, qui est simple et qu'on ne peut pas dire être composée de deux, à l'une desquelles elle ne soit point du tout opposée, ainsi qu'elle ne l'est point à celle de gauche à droite, quand la balle est poussée de biais suivant la ligne AB.

Or, quel changement peut-il arriver en cette détermination de haut en bas, que celui qu'a expliqué M. Descartes? à savoir que cette balle, en continuant de descendre, avance tantôt plus et tantôt moins vers le bas qu'elle ne faisoit, selon le changement, c'est à dire l'augmentation ou la diminution que sa vitesse a reçue en B, et selon le rapport que cette vitesse a eu avec la détermination vers le côté droit, qui a dû toujours demeurer la même, comme j'ai dit plusieurs fois, c'est à dire

(1) *Voir* le texte de Descartes, page 369.

qui a dû faire que la balle ait toujours autant avancé de ce côté-là qu'elle avoit fait auparavant.

Et partant, tant s'en faut que l'absurdité qu'avoit voulu inférer votre sceptique suive bien de ce qu'a dit M. Descartes, qu'au contraire il se trouve que c'est lui-même qui, au lieu d'un bon argument, s'est embarrassé dans un sophisme, en supposant que la détermination de la balle dans une chute perpendiculaire étoit la même, au même sens que celle de gauche à droite est dite être la même quand la balle tombe obliquement.

7. Que si, après cela, vous prenez la peine d'examiner la réponse que M. Descartes a fait lui-même au reste des difficultés que votre sceptique lui a autrefois proposées par l'entremise du Révérend Père Mersenne, et auxquelles il satisfit alors par une lettre qu'il adressa à M. Mydorge ([1]), dont je vous ai naguère envoyé la copie, vous trouverez que ce qu'il dit est véritable, à savoir que votre sceptique s'est trompé, pour avoir parlé de la composition du mouvement en deux divers sens, et inféré de l'un ce qu'il avoit seulement prouvé de l'autre.

Je ne répète point ici ce qu'il en a dit; car, outre qu'il seroit inutile, comme j'en étois là, un de mes amis, appelé M. Rohault, savant mathématicien et des mieux versés que je connoisse en la philosophie de M. Descartes, m'est venu apporter une réponse qu'il a faite à votre lettre au Père Mersenne ([2]), pensant que M. Descartes n'y avoit point répondu (car je ne lui avois point montré cette lettre à M. Mydorge), et que vous n'eussiez reçu de lui aucune réponse, voyant que dans la lettre que vous m'avez fait l'honneur de m'écrire, laquelle je lui avois fait voir, vous continuez vos premières difficultés, et que dans celle à M. de la Chambre vous dites avoir autrefois contesté à M. Descartes sa démonstration touchant la réfraction, à lui, dites vous, *viventi atque sentienti*, mais qu'il ne vous satisfit jamais ([3]).

([1]) *Voir* la note de la page 125.
([2]) Lettre XXIV. — Cette réponse de Rohault est la Pièce XCIV ci-après.
([3]) *Voir* ci-dessus page 355-356.

Et pource qu'il entend beaucoup mieux que moi toutes ces matières, et qu'il a répondu article par article à tous ceux de votre dite lettre, je m'abstiendrai de vous ennuyer davantage par mon discours, afin de vous laisser plus de temps pour examiner la réponse qu'il a faite à votre lettre. S'il me l'eût apportée plus tôt, il nous auroit tous deux soulagés : moi, d'écrire d'un sujet qui passe mes forces, et vous, de lire une si mauvaise lettre. Mais, comme c'en étoit déjà fait, je n'ai pas voulu perdre ma peine et j'ai pensé qu'il valoit mieux vous fatiguer de cette lecture, et vous donner par même moyen des preuves du soin où je m'étois mis de m'acquitter de ce que je vous devois, que de vous laisser venir la pensée que je m'en serois peut-être oublié, et que j'aurois été bien aise qu'un autre m'en eût déchargé.

Au reste, Monsieur, je vous prie d'excuser ce qui peut m'être échappé de libre en répondant à votre sceptique. J'aurois agi avec tout autre respect si mon discours se fût adressé à vous; mais, bien loin de craindre que pour cela vous me refusiez justice, je prends même l'assurance de vous demander quelque grâce. Il y a des rencontres où un peu de faveur n'offense point l'équité et, si dans celle-ci vous vous mettez de mon parti, je puis vous assurer qu'en toute autre je serai entièrement à vous, et que vous pourrez faire état d'avoir toujours prêt en moi, Monsieur,

Un très humble et très obéissant serviteur,

CLERSELIER.

Paris, ce 15 mai 1658.

XCIV.

RÉFLEXIONS OU PROJET DE RÉPONSE A LA LETTRE DE M. DE FERMAT

QUI CONTIENT SES OBJECTIONS SUR LA DIOPTRIQUE DE M. DESCARTES. PAR M. ROHAULT.

15 mai 1658.

(D., III, 46; Bibl. nat. fr. 3280, n. acq., f^{os} 51-56.)

Je ne sais si le Père Mersenne, à qui cette lettre (¹) étoit adressée, l'a communiquée à M. Descartes, ou si, l'ayant reçue, ses occupations l'ont empêché d'y faire réponse. Toutefois il paroît n'y avoir point répondu, parce que M. de Fermat, qui l'avoit écrite il y a environ vingt ans, répète encore à peu près les mêmes difficultés dans une lettre qu'il a écrite depuis peu à un de mes amis de cette ville (²). Je m'en vais essayer de suppléer quelques réponses tirées de l'intention de M. Descartes, et pour le faire plus commodément, je ne me proposerai aucun ordre que celui qui est dans les articles ou sections de la lettre que j'examinerai séparément.

Art. 1er. — Le premier article ne contient qu'un compliment dont l'humeur civile de M. de Fermat honoroit M. Descartes, et dont sa mémoire lui est encore redevable.

Art. 2^{d}. *Je tranche*, etc. — Quoique M. Descartes accommode son *medium* à sa conclusion, et qu'il divise son mouvement en certaines déterminations plutôt qu'en d'autres, on ne le doit non plus trouver étrange que si un géomètre se sert d'une construction plutôt que d'une autre pour l'exécution d'un problème; et l'on ne conteste jamais la voie qu'il choisit, pourvu qu'il vienne à bout de ce qu'il entreprend.

(¹) La Lettre XXIV ci-avant : les articles distingués par Rohault sont identiques avec ceux du numérotage de notre édition.

(²) La Lettre XC *bis* à Clerselier.

Au reste, M. Descartes a dû diviser son mouvement en une détermination perpendiculaire à la surface devers laquelle il étoit mu et en une détermination parallèle à la même surface, parce que, cette dernière ne rencontrant aucune opposition, il étoit assuré qu'elle devoit demeurer la même; ce qui lui étoit un moyen de conclure une vérité plus aisément qu'il n'eût pu faire en suivant une autre méthode.

Art. 3e. *Je reconnois,* etc. — M. de Fermat semble favoriser M. Descartes, en avouant qu'il est de son sentiment touchant la différence qu'il établit entre le mouvement et la détermination, et tâchant même de le prouver. Cependant il semble aussi qu'il y ait de l'adresse, pource qu'il impute à M. Descartes une opinion qu'il désavoueroit, à dessein, comme on pourroit croire, de s'en servir dans la suite.

C'est dans le second exemple, où il assure qu'une balle, poussée du point H au point B perpendiculairement sur la surface CBE, ne perd pas de sa détermination, à cause, dit-il, qu'en pénétrant l'eau ou la toile, elle continue à se mouvoir dans la même ligne droite.

Mais il doit considérer que la détermination d'un mobile doit être réputée changer, non seulement quand il quitte la ligne dans laquelle il se mouvoit auparavant, ou quand il se meut à contre-sens dans la même ligne, mais encore en se mouvant du même sens dans la même ligne droite, pourvu que ce soit [plus ou] moins loin qu'il n'étoit déterminé d'aller en ce sens-là. Et c'est en cette troisième façon que la quantité de la détermination de la balle est devenue moindre, autant que le mouvement : aussi la surface CBE étoit autant opposée à la première que la liaison des parties l'étoit à l'autre : c'est pourquoi il faut réputer comme nul cet exemple qui n'étoit que pour prouver une vérité que les deux parties ne contestent point.

Je ne daignerois d'observer que M. de Fermat appelle force ou puissance mouvante ce que M. Descartes appelle le mouvement, parce qu'il ne paroît pas dans la suite de la lettre que cette différence soit d'aucune conséquence.

Art. 4e. *Je reviens maintenant,* etc. — Cet article ne contient que quelques paroles de M. Descartes.

Art. 5^e. *Je remarque d'abord*, etc. — Le manque de mémoire qui est ici imputé à M. Descartes, est fondé sur la croyance que M. de Fermat a, que la détermination de haut en bas [de l'exemple] de la page 17 de la Dioptrique n'est point changée, qui est une erreur semblable à celle qui a été désavouée dans la remarque sur l'article 3^e. Et il ne sert de rien, pour prouver sa pensée, de dire que la détermination dans la ligne BI est composée en partie de celle qui fait aller le mobile de haut en bas, comme [étoit] celle qui le faisoit auparavant mouvoir vers le même côté dans la ligne AB. Il y a [en cela] de l'équivoque, et encore qu'on remarque toujours une détermination de haut en bas, la seconde est autre que la première, de même que dix écus sont une autre quantité d'écus que quinze écus, encore que ce soit toujours des écus.

Art. 6^e. *Mais donnons que*, etc. — Après que M. de Fermat accorde, comme par forme de passe-droit, une chose qui est de devoir, il s'efforce de prouver que M. Descartes ne s'est pas aperçu que la détermination de gauche à droite étoit aussi changée; ce qui véritablement infirmerait sa démonstration. La raison, dit-il, est qu'on ne sauroit dire que la détermination de haut en bas soit changée, sinon parce que, depuis que le mobile se meut dans la ligne BI, sa quantité n'a plus la même raison avec celle de gauche à droite, qu'elle avoit quand il étoit porté dans la ligne AB.

Je ne sais si M. de Fermat parle ici tout de bon, d'autant qu'il raisonne comme une personne qui, après avoir porté quinze écus dans l'une de ses pochettes et trente dans l'autre, et en ayant perdu, par je ne sais quel accident, quelques-uns des quinze, reconnoitroit cette perte par cela seulement que ce qui lui reste des quinze n'est plus la moitié de la somme qu'il a de l'autre côté, après quoi il vient à croire, pour se consoler, que cette dernière est augmentée, parce qu'elle fait, en récompense, plus du double de celle d'où il trouvoit d'abord à redire.

M. Descartes raisonne d'une autre façon, sans pourtant le faire autrement qu'un jeune homme qui n'auroit pas appris le cinquième

Livre des Éléments d'Euclide. Car, comme celui-ci jugeroit qu'il auroit perdu quelques-uns des quinze écus, en comparant ce qui lui resteroit avec ce qu'il avoit auparavant dans la même pochette, et ne se soucieroit pas de les comparer avec les trente de l'autre, de même M. Descartes juge du changement arrivé en la détermination de haut en bas, parce que sa quantité n'est plus la même, depuis que le mobile est au dessous de la surface CBE, qu'elle étoit quand il étoit au dessus. Et il a raison d'assurer que la détermination de gauche à droite n'est pas changée, parce que sa quantité est la même, le mobile étant dans la ligne BI, qu'elle étoit quand il étoit porté en AB.

Art. 7e. *Mais donnons encore*, etc. — Outre que M. de Fermat accorde encore ici gratuitement une chose qu'il auroit tort de contester, comme il se voit dans la remarque précédente, cet article ne contient que quelques paroles de M. Descartes.

Art. 8e. *Voyez comme il retombe*, etc. — M. Descartes est ici accusé de retomber pour la seconde fois dans une même faute, manque de se ressouvenir qu'il y a différence entre la détermination et le mouvement. Mais cette accusation n'est fondée que sur ce que M. de Fermat prend un peu rigoureusement les paroles de M. Descartes : car, quand il dit ces mots : *elle doit faire deux fois autant de chemin vers le même côté*, cela ne signifie pas que la balle se meuve dans une ligne deux fois plus grande qu'auparavant, mais que, quelle que soit cette ligne, elle doit tellement être inclinée vers la droite que la balle avance de ce côté-là deux fois plus qu'elle n'avoit fait. C'est le sens qu'il falloit donner aux paroles de M. Descartes, au lieu de l'autre, par lequel on prétend qu'il confond deux choses diverses; et son intention étoit assez évidente parce que pendant qu'il dit que la quantité de la détermination devient double dans le même temps, il suppose que le mouvement n'est que simple, c'est à dire que le mobile parcourt une ligne égale à celle qu'il avoit parcourue auparavant.

Ce qui suit de cet article, et l'absurdité que M. de Fermat y conclut, n'est pas au désavantage de M. Descartes, qui nieroit que la détermination de haut en bas demeure la même, suivant ce qui a été dit dans

la remarque sur le 3e article, et ainsi tout cet appareil de raisonnement s'en va en fumée.

Art. 9, 10, 11, 12. — Je passe pour vrai tout ce que contiennent ces articles; mais je crains qu'ils ne fassent point du tout au sujet.

Art. 13e. *Cela ainsi supposé*, etc. — M. de Fermat estime que, dans la page 20 de la Dioptrique, la supposition de M. Descartes est que l'accroissement d'un tiers de mouvement qui arrive à la balle soit simplement de haut en bas ou selon la ligne BG, au lieu que c'est le mesurer dans la ligne qu'elle a à décrire ou parcourir actuellement. Et cela est assez aisé à entendre, parce que, si cela étoit, M. Descartes n'auroit pas supposé, comme il a fait, la force du mouvement de la balle être augmentée d'un tiers, mais il auroit supposé la détermination de haut en bas être augmentée d'un tiers, et n'auroit rien supposé du mouvement. Il ne faut donc pas dire qu'à son sens, la balle qui se meut en BI s'y meuve d'un mouvement composé de celui qu'elle avoit vers BD et d'un autre vers BG dont on veuille qu'il suppose la quantité être du tiers plus de ce qui étoit en AB, mais bien que le mouvement actuel de la balle soit d'un tiers plus vite qu'auparavant, laissant au raisonnement à définir quel changement doit suivre de là en la détermination de haut en bas.

Art. 14e. *Imaginons ensuite*, etc. — Ce que M. de Fermat conclut dans cet article est vrai dans sa supposition, laquelle, comme je viens de remarquer, étant différente de celle de M. Descartes, il ne faut pas s'étonner s'ils établissent tous deux des proportions différentes desquelles par conséquent l'une ne sauroit détruire l'autre.

Art. 15e. *D'ailleurs la principale raison*, etc. — Il est vrai que M. Descartes entend que le mouvement d'un mobile accroît toujours d'une pareille quantité en pénétrant un même milieu, quoiqu'il tombe sur la surface avec des inclinaisons différentes. Et cela est bien raisonnable, puisque la facilité de se mouvoir dépend de la nature du corps que l'on suppose tel qu'il se peut ouvrir pour faire passage aussi facilement vers un côté que vers un autre, et que de l'inclinaison du rayon d'incidence dépend seulement la détermination à la quantité

de laquelle les diverses chutes pourront apporter de la variété selon le rapport qu'auront entre elles la détermination et la vitesse. Ce que M. de Fermat ajoute ensuite et qu'il dit avoir démontré être faux n'est vrai que dans la supposition qu'il croyoit être celle de M. Descartes, mais qui pourtant, comme j'ai montré, en est fort différente.

Art. 16[e]. *Ce n'est pas que*, etc. — M. de Fermat avoue qu'il n'est pas certain s'il faut suivre sa proportion plutôt que celle qu'il tâche de combattre. Mais je ne fais pas difficulté d'avouer qu'il faudroit retenir la sienne, si l'accélération ou le ralentissement du mouvement dépendoit de la seule surface commune aux deux corps dans lesquels le mobile se meut : mais parce que cette surface ne sauroit que détourner le mouvement et que c'est le second corps qui le facilite ou qui l'empêche, on doit retenir celle de M. Descartes.

Nous saurons, quand il plaira à M. de Fermat, les pensées qu'il a touchant la réfraction; mais je puis déjà dire par avance que ce que vous m'en avez fait voir d'ébauché dans sa lettre à M. de la Chambre m'a paru fort ingénieux et digne de lui ([1]).

Si vous lui faites voir ceci, je vous prie de lui taire mon nom, ou, si vous trouvez à propos de le lui déclarer, je vous prie aussi qu'il sache que ce n'est pas d'aujourd'hui que le bruit de son nom est venu jusques à moi; que j'honore beaucoup son mérite, et que je tiendrai à honneur s'il me daigne faire la grâce de me mettre au rang de ses très humbles serviteurs.

([1]) Lettre LXXXVI.

XCV.

FERMAT A CLERSELIER [1].

DIMANCHE 2 JUIN 1658.

(D., III, 47; Bib. nat. fr. 3280, n. acq., fos 57-61.)

Monsieur,

1. Je suis si passionné pour la gloire de M. Descartes que vous ne pouvez m'obliger plus sensiblement qu'en combattant les opinions du sceptique qui s'oppose à ses sentiments. Mais prenez garde, Monsieur, qu'il importe de conduire votre travail jusques au bout, et de renverser entièrement sur leurs auteurs tout ce que vous appelez ou paralogismes ou sophismes. Il ne suffit pas de dire que le sens de M. Descartes a été mal pris par ceux qui le reprennent; il faut prouver que l'explication que vous lui donnez va tout droit et sans détour à sa conclusion, et qu'enfin sa preuve est démonstrative.

2. Nous avions cru que la balle qui conserve sa direction et sa route ne perd point sa détermination, et nous l'avions avec quelque raison inféré de la différence que M. Descartes établit entre le mouvement et la détermination. Mais, sans nous empresser davantage à prouver la conséquence que nous tirions de son raisonnement, nous nous tenons pour suffisamment avertis de sa pensée et de la vôtre, qui veut « que la détermination d'un mobile soit réputée changer, non seulement quand il quitte la ligne dans laquelle il se mouvoit auparavant, ou quand il se meut à contre-sens dans la même ligne, mais encore en se mouvant du même sens dans la même ligne droite, pourvu que ce soit moins loin qu'il n'étoit déterminé d'aller en ce sens-là.

Et c'est en cette troisième façon », dites-vous [2], « que la quantité de la détermination de la balle est devenue moindre autant que le

(1) Réponse aux Lettres XCIII et XCIV.
(2) Lettre XCIV, 3.

mouvement », lorsqu'elle se meut sur la ligne HBG de la page 17 de la Dioptrique ([1]). Mais prenez garde que ce ne soit tomber dans la pétition du principe.

Vous entendez donc, dans la page 17, que la toile n'étant *aucunement* opposée à la détermination de gauche à droite, ces paroles veulent dire que cette détermination avance autant vers la droite qu'elle faisoit auparavant. C'est ce que je nie et qu'il faut prouver : car, bien que la toile n'empêche point que la balle n'avance toujours vers la droite, elle ne laisse pas d'avancer vers la droite, soit que ce progrès soit plus lent, soit qu'il soit plus vite qu'auparavant. Or, de cela seul que la toile n'empêche pas le progrès vers la droite, vous en inférez que ce progrès doit être justement le même, c'est à dire ni plus ni moins vite qu'auparavant. C'est donc αἴτημα αἰτήματος, et il faut de deux choses l'une : ou que le *medium* soit le même que la conclusion, ou que la conclusion en soit mal tirée.

Peut-être direz-vous que le mot *aucunement* fait tout le mystère, et qu'en disant que la toile ne lui est *aucunement* opposée en ce sens-là, tout le reste s'en déduit aisément. Mais il en faut toujours revenir là : si par le mot *aucunement* vous entendez que la toile n'empêche pas que la balle ne continue sa marche vers la droite et que son progrès ne se fasse également et en temps égal, je le nie et c'est ce qu'il faut prouver; si vous entendez que la toile ne lui est *aucunement* opposée, c'est à dire qu'elle n'empêche pas que la balle ne continue d'avancer vers la droite, sans assurer encore si son progrès doit se faire en temps égal, vous ne trouverez jamais votre compte dans la conclusion.

D'où il suit clairement que M. Descartes a voulu donner des paroles pour des choses, et qu'en traitant deux propositions différentes sur le sujet de la réflexion et de la réfraction, il a voulu accommoder son raisonnement à la première qu'il savoit et à la seconde qu'il a peut-être trop légèrement crue.

3. Ce n'est pas, comme je vous ai déjà souvent protesté, que sa pro-

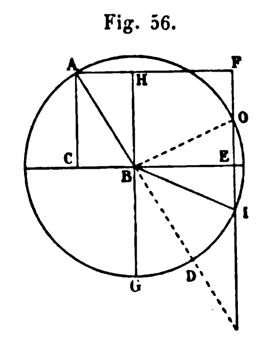
([1]) *Voir* fig. 56, page 118 ou 399.

portion des réfractions ne puisse être vraie; mais j'ai du moins à vous dire que je ne la tiens du tout point prouvée, et qu'en tout cas vous avez trop de complaisance en faisant semblant d'approuver ma pensée sur ce même sujet [1], puisque, si ce que j'ai écrit là dessus à M. de la Chambre est véritable, ce que M. Descartes croit avoir démontré est nécessairement faux, ces deux opinions étant tout à fait contradictoires et incompatibles.

Mais supposons, si faire se peut, que la proposition de M. Descartes soit véritable. Il faut du moins pourvoir à ce que rien ne se démente dans les suites, et c'est aux amis du défunt à prévoir tous les cas qui pourroient faire peine à la vérité supposée de cette proposition. En voici un, par exemple, qu'il vous faudra tâcher de résoudre.

Supposez, dans la page 17, que la balle rencontre, au lieu de la

Fig. 56.



toile ou de l'eau, un corps dur et impénétrable, et que, lorsque la balle arrive au point B, elle ne laisse pas de perdre la moitié de sa vitesse. Car cette supposition est possible et, quoique le corps CBE ne contribue rien à la diminution de ladite vitesse (comme il fait en l'exemple de M. Descartes, lorsque c'est de la toile ou de l'eau), néanmoins nous pouvons imaginer et supposer que, lorsque la balle arrive au point B, elle perd justement la moitié de sa vitesse, sans nous mettre en peine d'où provient cette diminution, puisque le même M. Descartes, en la page 20, suppose ou imagine au point B une

(1) Lettre XCIV, 16.

nouvelle puissance qui augmente le mouvement ou la vitesse de la balle : de sorte que je ne crois pas que les amis de M. Descartes soient assez injustes pour nier que cette supposition puisse être non seulement imaginée, mais réduite en acte.

Cela supposé, il ne faut que transporter le raisonnement de M. Descartes au dessus du plan, et on pourra dire avec lui que, pour savoir le chemin que la balle doit prendre, il faut considérer que son mouvement diffère entièrement de sa détermination à se mouvoir plutôt vers un côté que vers un autre : d'où il suit que leur quantité doit être examinée séparément.

Considérons aussi que, des deux parties dont on peut imaginer que cette détermination est composée, il n'y a que celle qui faisoit tendre la balle de haut en bas qui puisse être changée par la rencontre du plan CBE, et que, pour celle qui la faisoit tendre vers la main droite, elle doit toujours demeurer la même qu'elle a été, à cause que ce plan ne lui est aucunement opposé en ce sens-là.

Puis, ayant décrit du centre B le cercle AFD et tiré à angles droits sur CBE les trois lignes droites AC, HB, FE, en telle sorte qu'il y ait deux fois autant de distance entre FE et HB qu'entre HB et AC, nous verrons que cette balle doit tendre vers le point du cercle où la ligne FE coupe le cercle au dessus du plan; ce point peut être désigné par la lettre O.

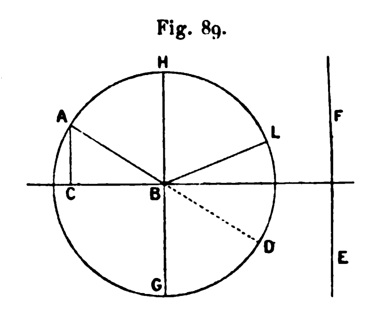
Car, puisque la balle perd la moitié de sa vitesse en rencontrant le plan au point B et qu'elle ne peut point le traverser par la supposition, elle doit employer deux fois autant de temps à passer au dessus depuis B jusques à quelque point de la circonférence du cercle AFD, qu'elle a fait à venir depuis A jusques à B. Et, puisqu'elle ne perd rien du tout de la détermination qu'elle avoit à s'avancer vers le côté droit, en deux fois autant de temps qu'elle en a mis à passer depuis la ligne AC jusques à HB, elle doit faire deux fois autant de chemin vers ce même côté, et par conséquent arriver à quelque point de la ligne droite FE au même instant qu'elle arrive aussi à quelque point de la circonférence du cercle AFD. Ce qui seroit impossible si elle n'alloit

vers O, d'autant que c'est le seul point au dessus du plan CBE où le cercle AFD et la ligne droite FE s'entrecoupent.

Si ce raisonnement, qui est justement le même que celui de M. Descartes, en le transportant seulement, ne conclut pas, pourquoi, de grâce, celui de M. Descartes conclura-t-il? Ce qui est démonstration au dessous deviendra-t-il paralogisme au dessus? Je ne crois pas que vous soyez de ce sentiment et que vous vouliez donner tout au seul nom et à l'inspiration, s'il faut ainsi dire, de M. Descartes.

4. Cela étant, passons à la figure de la page 19, et supposons de même que le plan CB est un corps dur et impénétrable, et que la balle, arrivant au point B, diminue de sa vitesse en telle sorte que la ligne FE, étant tirée comme en l'exemple précédent, ne coupe point le cercle AD.

Fig. 89.



Cette balle, par la supposition, ne peut point pénétrer au dessous du plan. Elle ne peut non plus se réfléchir à angles égaux, car sa détermination vers la droite ne seroit point la même. Enfin, quelque angle que vous preniez pour sa réflexion au dessus du plan, son progrès vers la droite sera toujours moindre qu'auparavant. Voire même quand vous la feriez rouler sur le diamètre CB en ligne droite, sa détermination vers la droite changeroit encore, comme il se voit à l'œil et comme il se déduit clairement de la supposition : car il faudroit qu'au même temps que la balle arrive à quelque point de la circonférence, elle arrivât à quelque point de la droite FE, ce qui est impossible.

Que deviendra donc cette balle? C'est à vous, Monsieur, et aux amis

de M. Descartes, à lui fournir un passeport et à lui marquer sa route en la faisant sortir de ce point fatal. J'en dirois davantage si je n'appréhendois de passer dans votre esprit pour un homme qui auroit envie de

Barbam vellere mortuo leoni (¹).

J'attends, Monsieur, votre réplique ou celle de M. Rohault, que j'estime comme je dois; et je vous assure à l'avance que je ne cherche que la vérité sans chicane, et que je suis de tout mon cœur, Monsieur, votre très humble et très affectionné serviteur,

FERMAT.

XCVI.

FERMAT A KENELM DIGBY (²).

(*Comm. ep.*, nº XLVII.)

1. Illustrissimos Viros Vicecomitem Brouncker et Johannem Wallisium quæstionum numericarum a me propositarum solutiones tandem dedisse legitimas libens agnosco, imo et gaudeo. Noluerunt Viri Clarissimi vel unico momento impares sese aut ἥττονας quæstionibus propositis confiteri; mallem ipsos et quæstiones ipsas dignas laboribus Anglicis statim agnovisse et, postquam adepti ipsarum solutiones fuissent, triumphum eo illustriorem egisse quo certamen magis arduum apparuisset. Contrarium ipsis visum est; id sane gloriæ illustrissimæ et ingeniosissimæ nationis condonandum. Verùm, ut deinceps ingenue utrimque agamus, fatentur Galli propositis quæstionibus satisfecisse Anglos; sed fateantur vicissim Angli quæstiones ipsas dignas fuisse quæ ipsis proponerentur, nec dedignentur in posterum numerorum

(¹) MARTIAL, livre X, épigr. 90.
(²) Envoyée par Digby à Wallis, le 19 juin 1658.

integrorum naturam accuratius examinare et introspicere, imo et doctrinam istam, quâ pollent ingenii vi et subtilitate, propagare.

2. Quod ut ab illis libentius impetremus, Diophantum ipsum et celeberrimum illius interpretem Bachetum ad auctoritatem rei proponimus.

Supponit Diophantus in plerisque Libri IV et V quæstionibus *numerum omnem integrum vel esse quadratum vel ex duobus aut tribus aut quatuor quadratis compositum.* Id sibi Bachetus, in commentariis ad quæstionem XXXI Libri IV, perfecta demonstratione assequi nondum licuisse fatetur. Id Renatus ipse Descartes incognitum sibi ingenue declarat in epistola quadam, quam propediem edendam accepimus, imo et viam, qua huc perveniatur, difficillimam et abstrusissimam esse non diffitetur (¹). Cur igitur de propositionis illius dignitate dubitemus, non video. Ejus tamen perfectam demonstrationem a me inventam moneo Viros Clarissimos.

Possem et plerasque adjungere propositiones non solum celeberrimas, sed et firmissimis demonstrationibus probatas; exempli causa :

Omnis numerus primus qui unitate superat quaternarii multiplicem, est compositus ex duobus quadratis. Hujusmodi sunt 5, 13, 17, 29, 37, 41, etc.

Omnis numerus primus qui unitate superat ternarii multiplicem, est compositus ex quadrato et triplo alterius quadrati. Tales sunt 7, 13, 19, 31, 37, 43, etc.

Omnis numerus primus qui vel unitate vel ternario superat octonarii multiplicem, componitur ex quadrato et duplo alterius quadrati. Tales sunt 3, 11, 17, 19, 41, 43, etc.

Sed et præcedentem Bacheti propositionem generaliter olim Domino

(¹) *Lettres de Mr Descartes*, éd. Clerselier, III, 66, p. 365 : « Mais pour ce Theoreme, qui est sans doute l'un des plus beaux qu'on puisse trouver touchant les nombres, je n'en sçay point la demonstration, et je la juge si difficile que je n'ose entreprendre de la chercher. » (Lettre à Mersenne, du 27 juillet 1638.) Descartes parle du théorème général énoncé dans la Lettre de Fermat pour Sainte-Croix (ci-dessus XII, 3) et rappelé ci-après.

de Sainte-Croix proposuimus ([1]), ejusque demonstrationem non ignoramus.

Omnis numerus integer : vel est triangulus vel ex duobus aut tribus triangulis compositus; est quadratus vel ex duobus, tribus aut quatuor quadratis compositus; est pentagonus vel ex duobus, tribus, quatuor aut quinque pentagonis compositus; est hexagonus vel ex duobus, tribus, quatuor, quinque vel sex hexagonis compositus; et sic uniformi in infinitum enuntiatione.

3. Hæc omnia et alia infinita quæ ad numeros integros spectant, quæque a nobis et inventa et generaliter demonstrata sunt, possemus et proponere Viris Clarissimis et, proponendo, negotium saltem aliquod ipsis facessere. Sed ingenuitatem gallicam sapient magis propositiones aliquot quarum demonstrationem a nobis ignorari non diffitemur, licet de earum veritate nobis constet.

Meminimus Archimedem non dedignatum propositionibus Cononis, veris quidem, sed tamen indemonstratis, ultimam manum imponere, earumque veritatem demonstrationibus illis subtilissimis confirmare. Cur igitur simile auxilium a Viris Clarissimis non exspectem, Conon scilicet Gallicus ab Archimedibus Anglis?

1° Potestates omnes numeri 2, quarum exponentes sunt termini progressionis geometricæ ejusdem numeri 2, unitate auctæ, sunt numeri primi ([2]).

Exponatur progressio geometrica 2, cum suis exponentibus :

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.

Primus terminus 2, auctus unitate, facit 3, qui est numerus primus.

Secundus terminus 4, auctus unitate, facit 5, qui est pariter numerus primus.

([1]) *Voir* Lettre XII, 3.
([2]) *Voir* Lettre XLIII, 3.

Quartus terminus 16, auctus unitate, facit 17, numerum primum.

Octavus terminus 256, auctus unitate, facit 257, numerum primum.

Sume generaliter omnes potestates 2, quarum exponentes sunt numeri progressionis, idem accidet. Nam, si sumas deinde decimum sextum terminum, qui est 65536, ille auctus faciet 65537, numerum primum. Hoc pacto, potest dari et assignari nullo negotio numerus primus dato quocumque numero major.

Quæritur demonstratio illius propositionis, pulchræ sane, sed et verissimæ, cujus ope, ut jam diximus, problema alias difficillimum solvi statim potest : *Dato quovis numero, invenire numerum primum dato numero majorem.* Hujus clavis beneficio reserabunt fortasse Viri Clarissimi mysterium omne de numeris primis, hoc est : *Dato numero quovis, invenire* via brevissima et facillima *an sit primus vel compositus.*

2° Deinde : Duplum cujuslibet numeri primi unitate minoris quam multiplex octonarii, componitur ex tribus quadratis.

Esto quilibet numerus primus, unitate minor quam octonarii multiplex ut sunt 7, 23, 31, 47, etc.; eorum duplex est 14, 46, 62, 94 : componitur ex tribus quadratis.

Propositionem illam veram asserimus, sed Cononis modo, nondum aut asserente aut demonstrante Archimede.

3° Si duo numeri primi, desinentes aut in 3 aut in 7, et quaternarii multiplicem ternario superantes, inter se ducantur, productum componitur ex quadrato et quintuplo alterius quadrati.

Tales sunt numeri 3, 7, 23, 43, 47, 67, etc. Sume duos ex illis, exempli gratia, 7 et 23; quod sub iis fit, 161, componetur ex quadrato et quintuplo alterius quadrati. Nam 81, quadratus, et quintuplum 16 æquantur 161.

Id verum asserimus generaliter et demonstrationem tantum exspectamus. Singulorum autem ex ipsis quadrati componuntur ex quadrato et quintuplo alterius quadrati : quod et demonstrandum proponitur.

4. Sed ne demonstrationibus nimium fortasse deesse videamur, sequentem propositionem et asserimus et possumus demonstrare.

Nullus numerus triangulus, præter unitatem, æquatur numero quadratoquadrato.

Sint trianguli, ut norint omnes,

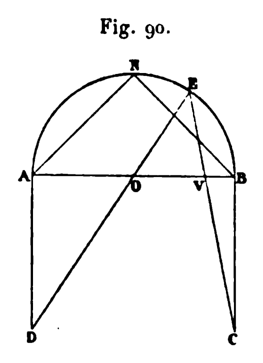
1. 3. 10. 15. 21. 28. 36. 45. etc.

Nullus omnino, facta in infinitum progressione, præter solam unitatem, erit quadratoquadratus.

5. Ne autem ad numeros integros deficiente Geometria videamur confugisse, en aliquot propositiones geometricas, quæ Angliam invisere non erubescent. Priores duas ex restituta a nobis Porismatum Euclideorum Geometria excerpsimus.

Esto semicirculus ANB (*fig.* 90) super diametro AB. Bisecetur in N

Fig. 90.



semicircumferentia ANB et, junctis NA, NB, a punctis A et B excitentur perpendiculares AD, BC, ipsis AN, NB æquales. Sumpto quolibet in semicircumferentia puncto, ut E, junctis rectis DE, EC occurrentibus diametro in punctis O et V, aio duo quadrata AV, BO simul sumpta esse, in hoc casu, æqualia quadrato diametri AB.

Generalius in Tractatu nostro hoc problema aut theorema proponebamus, sed in præsens speciale hoc sufficit (¹).

Esto parabole quævis AMC (*fig.* 91), in qua sumantur duo quælibet puncta A et B et diameter quævis MN. Sumatur quodcumque aliud punctum in parabole, ut C, a quo ad puncta A et B jungantur

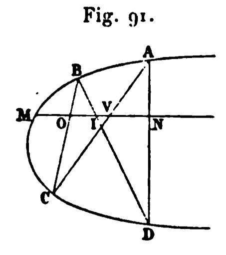
(¹) *Voir* Tome I, p. 81 : *Porisma quintum.*

rectæ diametrum secantes. In eadem semper ratione secabitur diameter. Nam, sumpto alio quovis puncto D, erit

MO ad OV ut MI ad IN,

et semper similes abscissæ a diametro in eadem erunt ratione (¹).

Fig. 91.



Hæc a nobis et inventa sunt et demonstrata, quæ ἀμοιβαίως pro theoremate frusti conici offerimus (²).

6. Sed et quæ nondum ex omni parte completa sunt, tentanda Anglis proponere non dubitamus.

Datis punctis, rectis aut circulis, invenire parabolen quæ per data puncta transeat et datas rectas aut circulos contingat.

Dari autem quatuor ex istis sufficit. Exempli gratia : Datis duobus punctis, recta et circulo, invenire parabolen quæ per data puncta transeat et rectam circulumque datos contingat. Unde emergunt quindecim problemata.

In ellipsi aut hyperbole idem proponatur; sed eo casu debent dari quinque aut puncta aut rectæ aut circuli aut quædam ex istis numero quinque, et inde emergunt 21 problemata.

Nos olim in Tractatu De contactibus sphæricis similia in sphæra expedivimus et tandem feliciter problema sequens construximus : Datis quatuor sphæris, invenire quartam quæ quatuor datas contingat (³). Tractatum integrum penes Dominum de Carcavi invenies.

(¹) *Voir* Tome I, p. 79 : *Porisma secundum*.
(²) Cubature du tronc de cône oblique, dans la lettre XXIII du *Commercium epistolicum* (de Wallis à Digby, le 4 mars 1658, v. s.).
(³) *Voir* Tome I, p. 69.

Monemus tantum Viros Clarissimos ut, sepositis tantisper speciebus Analyseos, problemata geometrica via Euclidea et Apolloniana exsequantur, ne pereat paulatim elegantia et construendi et demonstrandi, cui præcipue operam dedisse veteres innuunt satis et Data Euclidis et alii a Pappo enumerati Analyseos libri; quos omni ex parte jam olim supplevimus dum operibus Vietæ, Ghetaldi, Snellii Tractatus nostros De locis planis, De locis solidis et linearibus, De locis ad superficiem, et De porismatibus adjecimus (¹) : quos omnes habet dictus Dominus de Carcavi.

XCVII.

FERMAT A CLERSELIER.

DIMANCHE 16 JUIN 1658.

(D., III, 48; Bibl. nat. fr. 3280, nouv. acq., fᵒˢ 62-65.)

MONSIEUR,

1. Nous laissâmes dernièrement la balle de M. Descartes en belle peine (²). C'est dans la figure de la page 19 de la Dioptrique, où elle faisoit tous ses efforts pour sortir du point B à l'honneur de M. Descartes; mais elle y trouva toutes les issues fermées en suivant le raisonnement de cet auteur, et même nous ne pouvons lui donner présentement de secours, si nous ne faisons changer de biais à sa logique.

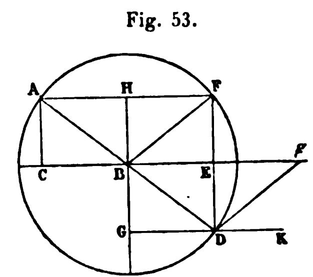
Reprenons la figure de la page 15 (*fig.* 53) et supposons que la balle qui va dans la droite AB diminue sa vitesse par moitié en arrivant au point B.

Si elle continuoit dans le même milieu, et que le plan CBE ne lui fût point opposé, elle iroit toujours en ligne droite vers D, avec cette différence pourtant qu'elle emploieroit depuis B jusques à D le double

(¹) *Voir* Tome I, pages 3; 91; 111; 76.
(²) *Voir* ci-dessus la fin de la lettre XCV.

du temps qu'elle avoit mis depuis A jusques à B. Mais si, en supposant la même diminution de vitesse au point B, nous supposons que le plan CBE impénétrable à la balle se trouve maintenant entre deux et empêche que la balle ne passe au dessous, je dis qu'elle se réfléchira aussi bien à angles égaux que si la vitesse et le mouvement demeuroit le même.

Fig. 53.



Car, puisque l'interposition du plan n'empêche que l'une des parties dont la détermination est composée, et que celle de gauche à droite reste la même, donc la balle avancera autant vers la droite qu'elle eût fait au dessous, si le plan n'eût pas empêché sa route. Or, si le plan CBE ne faisoit point d'obstacle, la balle, qui diminue sa vitesse par moitié au point B, mettroit le double du temps depuis B jusques à D qu'elle avoit mis depuis A jusques à B, et lorsqu'elle seroit au point D, elle auroit avancé vers la droite jusques en E; elle mettroit donc le double du temps à s'avancer depuis B jusques à E qu'elle avoit fait à s'avancer depuis C jusques à B. Et il y a même raison de AB à BC que de BD à BE, parce que les angles ABC, DBE, sur les deux droites AD et CE, sont égaux, et par conséquent les triangles ABC, DBE semblables.

Nous pouvons faire le même raisonnement au dessus, si du point E nous élevons la perpendiculaire EF, et dire que, lorsque la balle sera à un des points de la circonférence, comme F, elle y aura mis le double du temps qu'elle avoit mis depuis A jusques à B, puisque le plan que nous supposons maintenant entre deux ne fait rien de nouveau qu'empêcher la détermination de haut en bas. Et partant, la détermination de gauche à droite sera pour lors marquée par le même

point E, et par conséquent, comme FB à EB, ainsi la droite AB sera à BC. D'où il suit que les angles ABC, FBE seront toujours égaux de quelque manière et en quelque proportion que la vitesse ou le mouvement changent.

2. Si M. Descartes eût pris garde qu'en quelque manière que la vitesse change au point B, la réflexion ne laisse pas de se faire à angles égaux, il n'eût pas été en peine, ni ses amis non plus, de tirer la balle du point B, où ils l'ont [vue] malheureusement engagée dans l'exemple de ma dernière lettre. Il n'eût pas soutenu que, la vitesse venant à changer au point B, la balle ne reste pas d'avancer vers la droite autant qu'elle faisoit auparavant. Il n'eût pas déduit d'un fondement non seulement incertain, mais encore faux, sa proportion des réfractions, et enfin il n'eût pas esquivé, dans la figure (¹) de la page 19, de déterminer sous quel angle la balle étant au point B se réfléchit vers le point L.

Car, quoiqu'il paraisse, par son discours et par l'inspection même de la figure, qu'il a entendu que cette réflexion se fait à angles égaux, il a laissé un petit scrupule dans l'esprit des lecteurs, qui peuvent raisonnablement douter si, dans l'exemple de M. Descartes, la balle diminue sa vitesse au point B ou non. Si elle la diminue, la réflexion ne se pourroit pas faire à angles égaux, en suivant le raisonnement de M. Descartes. Que si la balle ne diminue point sa vitesse au point B, y a-t-il rien de plus contraire aux lois inviolables de la pure Géométrie, qui ne veut point qu'on puisse aller d'une extrême à l'autre sans passer par tous les degrés du milieu?

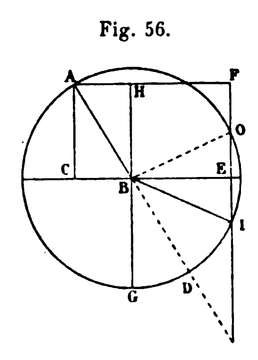
3. Or, M. Descartes et ses amis soutiennent que la balle, qui est poussée sur l'eau ou sur la toile, diminue sa vitesse également en toutes les inclinations, lorsqu'elle la traverse, et que cette diminution se fait dès le point B. Comment donc peut-on concevoir que, dès le premier angle où elle se réfléchit, sa vitesse ne diminue point du tout,

(¹) *Voir* fig. 89, p. 401.

et qu'il n'en puisse pourtant être pris aucun plus grand auquel elle ne diminue d'une certaine quantité qui soit toujours la même? Ne seroit-il pas plus géométrique et plus naturel de soutenir, dans le sentiment de M. Descartes, que la diminution de la vitesse se fait inégalement, que cette diminution est la plus grande de toutes en la chute perpendiculaire d'H vers B et qu'elle se rend toujours moindre à mesure que les inclinations varient jusqu'à ce qu'elle devienne nulle? ce que M. Descartes a peut-être cru arriver lorsqu'elle se réfléchit. Mais, parce que nous venons de prouver que, soit que la vitesse augmente ou qu'elle diminue au point B, la réflexion ne reste pas de se faire à angles égaux, nous ne devons pas nous mettre en peine de rechercher plus soigneusement la conduite secrète dont se sert la nature en affoiblissant la vitesse de la balle ou également ou inégalement à mesure que les inclinations viennent à changer.

4. Mais que deviendra le raisonnement qui se doit faire au dessous du plan CBE, en la page 17, par exemple? Il sera le même que le précé-

Fig. 56.



dent : car, que la vitesse diminue au point B ou par la rencontre de la toile, ou par quelque autre voie qui vienne d'ailleurs, c'est tout la même chose. Et puisqu'en la figure de la page 17 la balle perce la toile et qu'au point B la vitesse diminue par moitié, elle ne peut jamais avoir la détermination vers la droite pareille à celle qu'elle auroit, s'il n'y avoit point de toile et que pourtant la vitesse diminuât par moitié au point B, qu'en continuant toujours sa route vers la droite ABD.

Vous répliquerez : Mais, à ce compte-là, la détermination de haut en bas ne changeroit pas non plus par la rencontre de la toile. Je l'avoue, et pour ôter et éclaircir pleinement cette difficulté, il ne faut que dire que vous ne tirerez jamais autre chose du raisonnement des mouvements et des déterminations composées de M. Descartes, sinon que la réflexion se fait toujours à angles égaux et que la pénétration du second milieu se doit toujours faire en ligne droite. A quoi même se rapporte ce que vous dites dans votre dernier écrit (1), que la balle a toujours une même aisance à pénétrer le second milieu en toutes sortes d'inclinations; d'où il doit suivre, dans l'application du raisonnement de M. Descartes, qu'en toute sorte de cas la réflexion se fera à angles égaux, et que la pénétration se fera de même en tous les cas en ligne droite, le mouvement du dessous en ligne droite suivant les mêmes lois et répondant justement au mouvement du dessus à angles égaux.

Mais il n'y aura donc point de réfraction? me direz-vous. Je réplique que le mouvement de la balle et la réfraction ne se ressemblent que par la comparaison imaginaire de M. Descartes, et qu'au pis aller, si le détour de la balle en passant par le second milieu est véritable, il en faut chercher la raison ailleurs que dans la composition des mouvements, qui ne produira jamais en ce rencontre qu'un cercle dialectique.

De quelque biais que vous le preniez, il faudra examiner les principes secrets dont se sert la nature en produisant la réfraction, et si celui que j'ai touché dans ma lettre à M. de la Chambre (2) ne vous plait pas, je souhaite qu'il vous en vienne de meilleurs dans l'esprit, et que cette vieille dispute aboutisse enfin à la pleine et entière découverte de la vérité.

Je suis de tout mon cœur, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

FERMAT.

(1) Pièce XCIV, 15.
(2) Lettre LXXXVI.

XCVIII.

LALOUVÈRE A FERMAT [1].

21 JUILLET 1658.

Amplissimo Domino de Fermat in Suprema Curia Tolosana Senatori integerrimo.

Decem nunc dies sunt (Senator integerrime) cùm primùm legi à Te mihi oblatam nobilissimi et doctissimi Anonymi typis editam Epistolam, quæ *à præstantissimis toto Orbe Geometris postulat solutionem quarundam propositionum circa cycloidem ejusque centra gravitatis.* Ego licet, meæ tenuitatis mihi probè conscius, norim quàm longo post magnos illos viros intervallo in Geometrarum qualiumcumque numero locum teneam; quia tamen quid de quæsitis illis in mentem mihi veniret promere à Te tunc jussus sum, malui temeritatis quàm obsequii Tibi non prompti præstituti nomine accusari. En igitur quas circa problemata ejusmodi meditatus sum viginti omnino propositiones. Tu quem omnes Europæ Mathematici meritò suspiciunt, si quid perperam scriptum sit, aut si quid scriptis desit, emenda vel supple, modò tamen judiciorum publicorum occupationes quibus longè utilius distineris, id patiantur. Hâc emendatione vel etiam supplemento fidens noster hic libellus prodibit in vulgus intrepidè, quapropter Te hujus spei plenus adit, ab eo nempe missus qui pluribus nominibus jamdiu Tibi est

Addictus ex animo servus

ANTONIUS LALOUERA Societatis Jesu.

Tolosano in Collegio XII Kal. Aug. 1658.

[1] Dédicace de l'opuscule : *De Cycloide Galilæi et Torricellii Propositiones viginti Autore Antonio Lalouera Societatis Jesu,* imprimé à Toulouse en 1658 (rarissime, dont un exemplaire est conservé Bibl. nat., Imprimés, Réserve V, 835 A). — Reproduite en tête du premier livre de l'Ouvrage : *Veterum Geometria promota in septem de Cycloide libros,* publié par Lalouvère en 1660.

XCIX.

CLERSELIER A FERMAT.

MERCREDI 21 AOUT 1658.

(D, III, 49. Bibl. Nat. fr. 3280, nouv. acq., f^{os} 66-77.)

MONSIEUR,

1. Je me trouve aujourd'hui plus empêché à répondre que je n'étois la dernière fois : aussi avez-vous changé de condition et, de juge que vous étiez, vous êtes devenu partie. Quand je n'avois qu'à défendre devant vous la cause de M. Descartes contre votre sceptique, je ne me promettois pas un succès moins favorable que celui que j'ai eu : j'avois une bonne cause à défendre, des subtilités à éclaircir, et un juge clairvoyant pour m'entendre et prononcer. Mais, quand je vous considère descendu de votre siège pour vous porter vous-même partie contre celui que je défends, le respect que je vous dois en quelque état que vous paroissiez, la grande estime que j'ai toujours conçue de vous et qui s'augmente en moi à mesure que vous vous faites davantage connoître, et le peu d'usage que j'ai dans la matière que nous agitons à comparaison de celui que vous vous y êtes acquis, tout cela m'étonne et fait que je ne sais encore quelle issue me promettre de tout ce démêlé.

Je vous dirai pourtant d'abord que, si je voulois agir avec moins de franchise que ne m'oblige l'honnête procédé que vous gardez avec moi, je pourrois user d'une exception qui paroitroit peut-être légitime et recevable, en vous accordant tout ce que vous dites et prétendant que tout cela ne fait rien contre M. Descartes et ne combat en aucune façon sa doctrine de la réflexion et des réfractions.

Car je veux que la balle de la figure de la page 19 de la Dioptrique, selon la supposition que vous faites dans votre première lettre (¹), se

(¹) *Voir* Lettre XCV, p. 401.

trouve empêchée (comme vous dites sans doute agréablement) à trouver quelque issue pour prendre sa route; et je veux même que le passeport que vous lui avez donné par avance dans votre seconde, de peur que nous n'eussions pas assez de crédit pour lui en fournir un, et même que la route que vous avez eu la bonté de lui marquer en cet endroit ([1]), lui fût si aisée et si commode qu'elle ne fît point difficulté de la suivre, que pourroit-on conclure de là contre M. Descartes? lequel n'ayant apporté en ce lieu-là les exemples de la balle que pour expliquer certains effets particuliers de la lumière, à savoir celui de la réflexion qui se fait toujours à angles égaux, et celui de la réfraction qui se fait toujours de même sorte dans un même milieu et qui change selon la proportion qui est entre le milieu d'où elle sort et celui où elle entre, ce qui fait que tantôt elle s'approche et tantôt elle s'éloigne de la perpendiculaire : qui, dis-je, n'a eu aucune occasion d'expliquer le cas que vous proposez, pource qu'il n'a aucun rapport à son dessein.

2. Il n'y en avoit que trois qui y pussent servir, et il les a tous trois expliqués et, à mon avis, d'une manière si claire et si simple qu'il n'y a que ceux qui veulent plus que lui qui y trouvent de la difficulté.

Le premier cas, qui explique la réflexion, est celui d'une balle qui, étant poussée suivant la ligne AB, rencontre de biais dans son chemin un corps dur, impénétrable et inébranlable. Qu'y a-t-il de plus simple et de plus clair que cette balle, qui ne perd rien de sa vitesse, doit rejaillir à angles égaux, c'est-à-dire remonter aussi vite qu'elle est descendue et avancer autant qu'elle faisoit vers le côté où ce corps dur n'est point du tout opposé?

Le second, qui se rapporte à la réfraction lorsqu'elle s'éloigne de la perpendiculaire, est celui de la même balle qui, étant poussée comme dessus, rencontre aussi de biais un autre milieu, dans lequel elle pénètre et qui lui fait perdre une partie de sa vitesse. Quoi de plus clair et de plus simple que de dire que cette balle, ne pouvant plus

([1]) *Voir* Lettre XCVII, 1, 2.

aller si vite qu'elle faisoit, doit pourtant conserver la détermination qu'elle avoit auparavant à avancer vers un certain côté, à laquelle ce milieu n'est aucunement opposé, et à quoi la perte qu'elle a soufferte en sa vitesse ne résiste point et se peut accommoder? Pourquoi vouloir obliger cette balle à faire plus qu'elle ne doit, puisque la nature ne fait rien en vain?

Enfin le troisième cas, qui se rapporte à la réfraction lorsqu'elle s'approche de la perpendiculaire, et le seul qui restoit à M. Descartes à éclaircir, s'explique heureusement par la même balle qui, étant poussée comme auparavant, rencontre aussi de biais dans son chemin un autre milieu, dans lequel elle pénètre avec une égale facilité de tous côtés et qui augmente sa vitesse d'une certaine quantité. Que peut-on penser de plus simple et de plus naturel que de dire que cette balle, devant aller plus vite qu'elle ne faisoit selon quelqu'une de ses directions, n'avance pourtant pas davantage selon celle à laquelle ce corps, par qui sa vitesse a été augmentée, n'est point du tout opposé?

3. Le cas que vous proposez outre cela dans votre première lettre est superflu et ne peut servir à expliquer aucun de ces phénomènes de la lumière. Et, par conséquent, il n'est ici d'aucune considération et, quelque inconvénient qui en pût suivre, cela ne pourroit préjudicier à ce que M. Descartes a auparavant prouvé, et par quoi il a expliqué si intelligiblement ces effets merveilleux de la lumière qui ne laisseroient pas d'être vrais et tels qu'il les a démontrés, quand votre supposition seroit difficile à expliquer par ses principes, ce que je ne désespère pourtant pas de faire, et quand elle se devroit expliquer suivant les vôtres, ce que je n'estime pas.

Mais, pource que c'est en ceci que consiste toute notre question, il faut que j'éclaircisse une fois un point qui vous semble n'avoir pas été prouvé par M. Descartes, à cause que sa preuve n'est pas purement géométrique, mais qu'elle est en partie fondée sur quelques principes de la nature si clairs qu'ils ne demandent aucune explication.

4. Ces principes sont : 1° que chaque chose demeure en l'état qu'elle est pendant que rien ne la change; 2° que, lorsque deux corps se rencontrent qui ont en eux des modes incompatibles, il se doit véritablement faire quelque changement en ces modes pour les rendre compatibles, mais que ce changement est toujours le moindre qui puisse être; 3° qu'un corps ne peut résister ou causer du changement dans un autre qu'en tant qu'il lui est opposé.

Ainsi donc, si une balle se meut d'A vers B, dans la figure (¹) de la page 15, avec une certaine vitesse, elle continuera toujours d'aller avec la même vitesse vers ce côté-là si rien ne la change. Mais si vous lui opposez le corps dur, impénétrable et inébranlable CBE, pource que les modes de ces deux corps, l'un qui veut conduire la balle vers D et l'autre qui s'oppose à cette route, mais qui ne s'oppose point à sa vitesse, sont incompatibles, il faut qu'il arrive du changement en un de ces modes, mais le moindre qui puisse être. C'est pourquoi la balle changera de détermination et gardera sa vitesse, et d'autant que le corps CBE n'est opposé qu'à l'une des deux déterminations dont il est vrai que celle de la balle est composée eu égard au corps CBE sur lequel elle tombe, à savoir à celle qui la faisoit descendre et non point à celle de gauche à droite; ce corps ne peut apporter de changement qu'à celle-là et non point à l'autre, à laquelle il n'est point opposé. C'est pourquoi il oblige la balle à remonter et la laisse continuer à s'avancer vers la droite comme elle faisoit auparavant : à quoi il ne change rien, le mode de son corps n'ayant rien d'incompatible et d'opposé à celui-là.

Il ne faut plus ajouter à ce raisonnement que ce qui appartient à la Géométrie, et la preuve sera achevée. Si vous n'appelez pas cela preuve démonstrative, je ne sais plus de quelles raisons il se faudra servir pour en composer une; mais, pour moi, je me contente de pareilles démonstrations.

Or, le même raisonnement que je viens de faire se peut accommoder

(¹) *Fig.* 53, p. 409.

à la figure de la page 17 et à celle de la page 19 et à tous les cas qui se peuvent proposer, et je n'y vois rien de différent que les différentes suppositions : à savoir que le corps CBE tantôt est dur et tantôt liquide, tantôt pénétrable et tantôt impénétrable; que la vitesse tantôt diminue, tantôt augmente et tantôt demeure la même; et que la balle tantôt continue de descendre et tantôt est obligée de remonter, et même que tantôt on peut opposer un corps au cours de la balle et tantôt non.

5. Examinons maintenant ces cas l'un après l'autre suivant ces principes, et voyons ce qui en doit arriver; et je m'assure que l'on ne trouvera point que la chose doive aller comme vous dites, mais bien comme dit M. Descartes, et cela répondra en même temps à toutes vos nouvelles difficultés.

Premièrement, vous dites fort bien, au commencement de votre seconde lettre (1), que si l'on suppose que la balle qui va dans la ligne droite AB diminue sa vitesse par moitié en arrivant au point B, elle ira toujours en ligne droite vers D, si elle continue d'aller dans le même milieu et que le plan CBE ne lui soit point opposé : avec cette différence seulement, qu'elle emploiera depuis B jusques à D le double du temps qu'elle avoit mis auparavant depuis A jusques à B, et cela à cause qu'un corps doit toujours demeurer dans le même état où il est ou auquel on suppose qu'il soit, si rien ne le change. Or, n'y ayant rien qui change en la balle que la vitesse, ni rien par quoi la détermination doive être altérée plus d'un côté que d'un autre, tout cela fait qu'elle doit continuer dans la même ligne, et aller seulement moins vite selon cette détermination : de même que, lorsqu'un corps tombe perpendiculairement de l'air dans l'eau, il continue d'aller suivant la ligne perpendiculaire et va seulement d'autant moins vite que sa vitesse est diminuée à la rencontre de l'eau.

Si pourtant j'eusse été d'humeur à vouloir chicaner (ce qui ne m'arrivera jamais lorsque j'aurai affaire à une personne d'honneur et de mérite comme vous), j'aurois pu nier que le cas que vous proposez

(1) Lettre XCVII.

fût concevable et admissible : à savoir qu'un mobile, sans changer de milieu, puisse tout d'un coup passer d'une vitesse à une autre sans passer par les degrés d'entre deux. Ce que vous dites vous-même être contraire aux lois inviolables de la pure Géométrie et qui même est contraire à cette loi de la nature, qui est que chaque corps continue toujours de demeurer dans le même état autant qu'il se peut, et que jamais il ne le change que par la rencontre des autres. Le moyen donc de concevoir qu'un corps puisse tout d'un coup, étant arrivé au point B, perdre la moitié de sa vitesse, lorsqu'il ne se rencontre rien qui la lui puisse faire perdre! Mais je veux bien vous accorder toutes vos suppositions et ne vous rien nier, que ce qui ne se pourra absolument admettre à moins de renverser toutes les lois de la nature et toutes les notions claires et simples qui sont en nous.

6. Passons à votre seconde supposition, qui est à mon gré une des plus adroites que l'on pût faire en ce genre et dont sans doute j'aurois eu peine d'apercevoir la subtilité, n'étoit qu'étant accoutumé à suivre des voies fort simples dans mes raisonnements, je me défie de tout ce que je vois qui s'en écarte.

Vous supposez après cela que, la balle perdant comme auparavant la moitié de sa vitesse au point B, le plan CBE impénétrable se trouve entre deux et empêche que la balle ne passe au-dessous; et vous dites que la balle réfléchira aussi bien à angles égaux que si la vitesse ou le mouvement demeuroit le même. Et certainement je confesse que vous le prouvez d'une manière la plus ingénieuse qu'il est possible; mais permettez-moi aussi de vous dire qu'elle est captieuse et souffrez que je vous fasse voir en quoi je pense que vous vous êtes mépris.

Quand en l'exemple ci-dessus je suis demeuré d'accord que la balle, perdant au point B la moitié de sa vitesse, ne laissoit pas de continuer son chemin suivant la ligne BD, avec cette seule différence qu'elle alloit de moitié moins vite, ç'a été pource que, ne changeant point de milieu et aucun plan ne lui étant opposé, on ne pouvoit pas dire que la détermination de la balle suivant la ligne AB fût composée de deux

déterminations, non plus que lorsqu'une balle tombe perpendiculairement sur un plan. Mais ici, où vous supposez que le plan CBE lui est opposé, il est certain qu'à son égard la détermination de la balle sur la route AB est composée de deux déterminations, l'une qui la fait descendre vers lui, et l'autre qui la fait avancer vers la droite ou horizontalement, et que le plan s'oppose à celle-là et non point à celle-ci.

7. Maintenant, de deux choses l'une : ou vous supposez qu'après que la balle est venue avec deux degrés de vitesse, par exemple, depuis A jusques à B, étant au point B elle rencontre le plan CBE qui lui fait perdre la moitié de sa vitesse; ou bien vous supposez que, sans que ce plan y contribue, ayant perdu la moitié de sa vitesse au point B, elle rencontre le plan CBE. Et si j'ai bien compris le sens de votre seconde lettre, c'est principalement à ce dernier cas qu'elle se rapporte; mais remarquez encore ici en passant que je vous accorde plus que je ne devrois : car le moyen de concevoir qu'une balle perde la moitié de sa vitesse au point B, sans la rencontre d'aucun corps qui la lui puisse faire perdre!

8. Au premier cas, il est aisé de voir qu'il ne faut, comme vous avez fait dans votre première lettre (¹), que transférer le raisonnement de la figure de la page 17 au dessus du plan, et dire que, puisque la balle ne perd rien du tout de la détermination qu'elle avoit à avancer vers la droite, elle doit (toutes les autres conditions étant gardées) arriver au point O, ainsi que vous avez fort bien remarqué. C'est pourquoi je n'aurois garde de dire, comme vous faites : « Pourquoi de grâce le raisonnement de M. Descartes conclura-t-il au-dessous, s'il ne conclut pas au-dessus? Ce qui est démonstration en un cas deviendra-t-il paralogisme en l'autre? » Non sans doute : l'un et l'autre conclut également bien.

9. Au second cas, la balle peut suivre la route que vous avez mar-

(¹) Lettre XCV, p. 400.

quée dans votre seconde lettre ([1]), et réfléchir toujours à angles égaux, de quelque manière et en quelque proportion que la vitesse ou le mouvement change au point B : mais non pas à la vérité par la raison que vous dites. Car la même proportion ne doit pas être gardée par une balle qui, rencontrant de biais un plan impénétrable, est obligée de réfléchir, que celle qui est gardée par une autre balle que l'on suppose n'en point rencontrer, et qui doit suivre les mêmes lois que celle qui en rencontre perpendiculairement, à cause qu'une balle qui ne rencontre aucun plan n'a qu'une seule détermination : elle ne va ni à gauche ni à droite, au lieu qu'une balle qui tombe de biais sur un plan y va toujours avec deux déterminations, à l'une desquelles ce plan est opposé et à l'autre non : et cette circonstance en doit changer l'effet, selon les principes ci-devant posés.

Fig. 53.

Mais voici comme la balle peut suivre la route que vous avez marquée, et réfléchir à angles égaux : à savoir il faut supposer que la balle, étant au point B et ayant perdu la moitié de sa vitesse (ou telle autre quantité qu'il vous plaira), commence à ce point B à suivre la route qu'elle suivroit, si elle avoit commencé à se mouvoir à ce point-là avec la vitesse qui lui reste. Or il est constant que si, sans avoir égard à la ligne AB qu'elle a parcourue avec deux degrés de vitesse, elle commençoit à se mouvoir en B, avec la vitesse qu'on suppose qui lui reste et [suivant] la direction qu'elle a véritablement au point B, elle iroit vers D avec un degré de vitesse [et y arriveroit] en deux fois autant de temps qu'il lui en a fallu pour venir d'A en B, si rien ne s'opposoit à

([1]) *Voir* Lettre XCVII, 1.

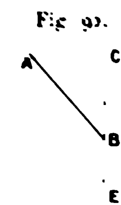
son mouvement. Et si, au lieu de lui opposer le plan impénétrable et inébranlable CBE au point B, on le lui opposoit au point D, il est évident, par ce que nous avons dit ci-dessus, que ce plan l'empêchant seulement de passer outre et non point d'avancer vers la droite, et ne diminuant ni n'augmentant la vitesse avec laquelle elle seroit venue vers lui depuis B, elle rejailliroit vers g et feroit un angle de réflexion gDK égal à celui d'incidence BDG, lequel se trouveroit égal à celui de la première incidence ABC. Or est-il qu'il doit arriver au point B le même changement en la détermination de la balle que celui qui arriveroit au point D si le plan CBE lui étoit opposé en ce point-là, puisque dès le point B la balle a toute la même vitesse et la même détermination qu'elle auroit au point D après avoir parcouru la ligne BD.

10. Et partant, la balle, selon votre supposition, doit, au point B, rejaillir suivant un angle égal à celui d'incidence : non point, comme j'ai dit, par la raison que vous dites, car il n'est pas vrai que, l'interposition du plan CBE n'empêchant que l'une des parties dont la détermination est composée, celle de gauche à droite reste la même qu'elle étoit quand la balle n'avoit aucun plan qui lui fût opposé; car, en ce dernier cas, la balle n'avoit qu'une détermination, et l'on ne peut pas dire qu'elle avançoit vers la droite. C'est pourquoi la conclusion que vous en tirez n'est pas non plus véritable.

Donc, dites-vous, la balle a dû avancer autant au-dessus vers la droite qu'elle eût fait au-dessous si le plan n'eût pas empêché sa route; et comme, lorsqu'elle seroit au point D au-dessous, elle auroit avancé en deux moments vers la droite depuis B jusques en E, de même aussi, pour avancer en deux moments autant au-dessus vers la droite, elle doit aller au point F qui est autant avancé vers la droite que le point D, et qui coupe le cercle au-dessus en même proportion que D le coupe au-dessous, et fait un angle de réflexion égal à celui d'incidence. Car toute cette proportion de gauche à droite que vous dites devoir être gardée au-dessus comme elle eût été au-dessous, si le plan CBE n'eût pas empêché sa route, n'est qu'une proportion imaginaire,

puisqu'au-dessous, quand il n'y a aucun plan interposé, la balle n'a aucune direction vers la droite, cette direction ou détermination vers la droite étant toujours relative au plan qu'on lui interpose. Et par exemple, si le plan CBE lui eût été opposé d'un autre sens comme en cette figure, où seroit tout votre raisonnement vers la droite? Mais cela doit arriver dans votre supposition même et dans toute autre, par la

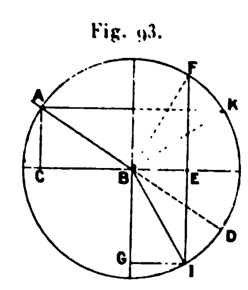
Fig. 92.



raison que j'ai dite, qui est conforme aux lois de la nature et aux principes ci-devant établis.

11. Pour éclaircir encore ceci davantage, supposons pour troisième cas, comme a fait M. Descartes à la fin de la page 19 de la *Dioptrique* (1), que la balle, ayant été premièrement poussée d'A vers B, rencontre au point B le plan CBE qui augmente la force de son mouvement ou sa vitesse d'un tiers, en sorte qu'elle puisse faire par après autant de chemin en deux moments qu'elle en faisoit en trois auparavant. Et il

Fig. 93.



suit manifestement qu'elle doit rejaillir en F, puisque la détermination

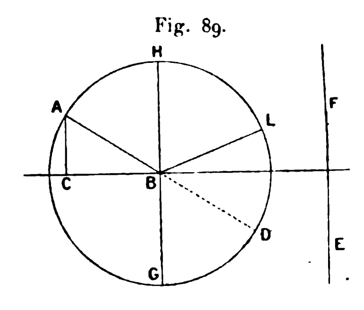
(1) Mais faisons encore ici une autre supposition et pensons que la balle ayant été premièrement poussée d'A vers B est poussée de rechef étant au point B par la raquette CBE, qui augmente la force de son mouvement, par exemple, d'un tiers, en sorte qu'elle puisse faire par après autant de chemin en deux moments qu'elle en faisait en trois auparavant. (*La Dioptrique*, p. 19-20).

vers la droite ne peut être augmentée par le plan CBE à laquelle il n'est aucunement opposé : et non pas en K, comme elle devroit faire, si votre raisonnement étoit véritable, mais qui ne le peut être, puisqu'il est contraire aux lois de la nature et même contre l'expérience, qui nous montre que la réflexion d'une balle et celle des autres semblables corps, qui ne sont pas parfaitement durs ou qui tombent sur d'autres qui affoiblissent leur mouvement, ne se fait jamais à angles égaux. Ainsi les balles les plus molles ne rebondissent pas si haut ni ne font pas des angles [de réflexion] si grands que celles qui sont plus dures.

Et remarquez que, puisqu'il est naturellement aisé de concevoir que, pour faire que la réflexion se fasse à angles égaux, le mouvement ne doit en aucune façon être augmenté ni diminué par la rencontre du plan, il semble que la raison nous doive aussi naturellement porter à croire que, lorsque ce plan l'augmente ou la diminue, l'angle de réflexion doit être à proportion ou plus grand ou plus petit que celui d'incidence, et non pas qu'il doive toujours être égal, comme il suit de votre raisonnement qui pour cela vous doit être suspect, quoiqu'il soit très ingénieux.

12. Mais, me direz-vous, que deviendra donc la balle dans la supposition que j'ai faite à la fin de ma première lettre (1), à l'occasion de la figure de la page 19? car c'est ici le point de la difficulté, et enfin il

Fig. 89.



la faut tirer de ce point fatal où elle paroit malheureusement engagée. C'est aussi ce que je prétends faire maintenant, à l'honneur de

(1) Lettre XCV, 4.

M. Descartes et sans faire changer de biais à sa logique, en me servant, dans le cas que vous proposez ici, du même raisonnement dont je me suis déjà servi quand j'ai passé à votre seconde supposition.

Si donc la balle, étant arrivée au point B, rencontre de biais le plan dur, impénétrable et inébranlable [CBE], et qu'elle perde à ce point B une telle partie de sa vitesse que la ligne FE, étant tirée comme aux exemples précédents, soit hors du cercle AD, je dis que : ou vous entendez que le plan CBE contribue à la perte de sa vitesse, ou vous entendez qu'il n'y contribue rien.

S'il n'y contribue rien, on ne peut pas concevoir autre chose sinon que la balle, après avoir perdu les deux tiers, par exemple, de sa vitesse, et ayant dans cet état une direction déterminée à aller vers D en un certain temps, à proportion de la force ou de la vitesse qui lui reste, et par conséquent d'avancer aussi suivant cette force d'une certaine quantité vers la droite à l'égard du plan CBE qu'on lui oppose, lequel pourtant n'est point opposé à cette direction vers la droite, elle doit rejaillir étant au point B comme elle feroit au point D, ainsi que j'ai dit ci-dessus. Et voilà la route que je lui aurois marquée, qui se trouve conforme à la vôtre, mais par une autre raison qui ne m'oblige point à changer de logique.

Mais remarquez que cette supposition même est impossible, qu'une balle perde les deux tiers de sa vitesse sans la rencontre d'aucun corps qui la lui puisse faire perdre.

Que si maintenant le corps CBE contribue à la perte de la vitesse, cela ne se peut faire en supposant le corps CBE parfaitement dur, impénétrable et inébranlable. Car le mouvement de la balle ne peut être diminué par la rencontre d'un corps, qu'en tant que la balle lui transporte de son mouvement; et si elle lui en transporte, cela ne se peut faire que du sens auquel le corps CBE lui est opposé et par conséquent elle ne lui peut transporter de son mouvement que selon cette partie de sa direction qui la fait tendre vers lui, et jamais la rencontre du corps CBE (que l'on doit supposer parfaitement uni) ne peut diminuer sa direction vers la droite ou parallèle. Or il est aisé de conclure que,

si la balle au point B a transporté au corps CBE tout le mouvement qui la faisoit tendre en bas, elle doit continuer son mouvement parallèle et rouler sur lui en avançant autant vers la droite qu'elle faisoit auparavant.

13. Que si, nonobstant cela, vous voulez contre toute raison faire cette supposition impossible, qu'elle perde une telle partie de sa vitesse au point B qu'elle ne puisse plus avancer autant vers la droite qu'elle faisoit auparavant, et par conséquent qu'elle ait aussi perdu une partie du mouvement qui la faisoit avancer vers la droite, alors je vous dirai qu'elle roulera sur le diamètre avec la vitesse qui lui reste, tout de même que, lorsque vous supposez que sans rencontrer aucun plan elle vient à perdre de sa vitesse, elle doit continuer son chemin dans la même ligne droite qu'elle avoit commencé à parcourir. Et ainsi il arrivera le même à cette balle que si, ayant été mue avec une certaine vitesse le long du plan CBE, il arrivoit qu'étant au point B (par une supposition impossible et sans aucune cause), elle vint à perdre une partie de sa vitesse : elle continueroit son chemin sur le même plan avec la vitesse qui lui resteroit.

Mais remarquez que, pour trouver quelque chose de défectueux aux raisonnements de M. Descartes, il en faut venir à des suppositions impossibles, et partant ce ne seroit pas merveille quand d'une impossibilité posée il s'ensuivroit une absurdité.

14. Par tout ce que dessus, il paroit que tout ce que vous dites dans votre seconde lettre [1] tombe de soi-même et n'a pas besoin de réponse : à savoir que, « si M. Descartes eût pris garde qu'en quelque manière que la vitesse change », c'est-à-dire augmente ou diminue « au point B, la réflexion ne laisse pas de se faire à angles égaux, il n'eût pas été en peine, ni ses amis non plus, de tirer la balle du point B où ils l'ont [vue] malheureusement engagée dans l'exemple de ma dernière lettre. Il n'eût pas soutenu que, la vitesse venant à changer au

[1] *Voir* Lettre XCVII, 2.

point B, la balle ne reste pas d'avancer vers la droite autant qu'elle faisoit auparavant et n'eût pas déduit, d'un fondement non seulement incertain, mais encore faux, sa proportion des réfractions ».

Tout cela, dis-je, n'étant plus appuyé d'aucunes raisons valables, se détruit de soi-même, aussi bien que ce que vous ajoutez à la fin de la même lettre [1] : à savoir que, le second milieu se pouvant, comme j'ai dit, ouvrir avec une égale facilité de tous côtés pour faire passage à la balle, et que la balle ayant toujours une même aisance à pénétrer le second milieu en toutes sortes d'inclinaisons, il doit suivre, dites-vous, « dans l'application du raisonnement de M. Descartes, qu'en toute sorte de cas la réflexion se fera à angles égaux et que la pénétration se fera de même en tous les cas en ligne droite, le mouvement de dessous en ligne droite suivant les mêmes lois et répondant justement au mouvement de dessus à angles égaux ».

15. Car, si je me suis assez bien fait entendre, vous devez maintenant tirer d'autres conclusions que celles-là des principes de M. Descartes et devez aussi, si je ne me trompe moi-même, avoir reconnu l'erreur du raisonnement duquel vous les aviez tirées. Et partant ne dites plus que le mouvement de la balle et la réfraction ne se ressemblent que par la comparaison imaginaire de M. Descartes; car c'est peut-être la plus juste et la plus claire que l'on puisse apporter pour l'expliquer. Mais, pour cela, il faut considérer la balle sans pesanteur, sans grosseur, sans figure et sans changement en sa vitesse dans toutes les lignes qu'elle parcourt : toutes lesquelles choses peuvent causer une infinité de variétés dans la réflexion et la réfraction d'une balle, mais, pource qu'elles n'ont point de lieu en l'action de la lumière [à laquelle se doit rapporter tout ce qu'il dit], M. Descartes ne les a point considérées dans le mouvement de cette balle dont il parle.

Et principalement il n'a point considéré cette circonstance que je vous prie de remarquer, qui est la plus commune et qui peut donner le plus d'occasion de douter de ce qu'a dit M. Descartes : c'est à savoir

(1) *Voir* Lettre XCVII. 4.

si la balle au point B a transporté au corps CBE tout le mouvement qui la faisoit tendre en bas, elle doit continuer son mouvement parallèle et rouler sur lui en avançant autant vers la droite qu'elle faisoit auparavant.

13. Que si, nonobstant cela, vous voulez contre toute raison faire cette supposition impossible, qu'elle perde une telle partie de sa vitesse au point B qu'elle ne puisse plus avancer autant vers la droite qu'elle faisoit auparavant, et par conséquent qu'elle ait aussi perdu une partie du mouvement qui la faisoit avancer vers la droite, alors je vous dirai qu'elle roulera sur le diamètre avec la vitesse qui lui reste, tout de même que, lorsque vous supposez que sans rencontrer aucun plan elle vient à perdre de sa vitesse, elle doit continuer son chemin dans la même ligne droite qu'elle avoit commencé à parcourir. Et ainsi il arrivera le même à cette balle que si, ayant été mue avec une certaine vitesse le long du plan CBE, il arrivoit qu'étant au point B (par une supposition impossible et sans aucune cause), elle vînt à perdre une partie de sa vitesse : elle continueroit son chemin sur le même plan avec la vitesse qui lui resteroit.

Mais remarquez que, pour trouver quelque chose de défectueux aux raisonnements de M. Descartes, il en faut venir à des suppositions impossibles, et partant ce ne seroit pas merveille quand d'une impossibilité posée il s'ensuivroit une absurdité.

14. Par tout ce que dessus, il paroit que tout ce que vous dites dans votre seconde lettre (¹) tombe de soi-même et n'a pas besoin de réponse : à savoir que, « si M. Descartes eût pris garde qu'en quelque manière que la vitesse change », c'est-à-dire augmente ou diminue « au point B, la réflexion ne laisse pas de se faire à angles égaux, il n'eût pas été en peine, ni ses amis non plus, de tirer la balle du point B où ils l'ont [vue] malheureusement engagée dans l'exemple de ma dernière lettre. Il n'eût pas soutenu que, la vitesse venant à changer au

(¹) *Voir* Lettre XCVII, 2.

point B, la balle ne reste pas d'avancer vers la droite autant qu'elle faisoit auparavant et n'eût pas déduit, d'un fondement non seulement incertain, mais encore faux, sa proportion des réfractions ».

Tout cela, dis-je, n'étant plus appuyé d'aucunes raisons valables, se détruit de soi-même, aussi bien que ce que vous ajoutez à la fin de la même lettre (¹) : à savoir que, le second milieu se pouvant, comme j'ai dit, ouvrir avec une égale facilité de tous côtés pour faire passage à la balle, et que la balle ayant toujours une même aisance à pénétrer le second milieu en toutes sortes d'inclinaisons, il doit suivre, dites-vous, « dans l'application du raisonnement de M. Descartes, qu'en toute sorte de cas la réflexion se fera à angles égaux et que la pénétration se fera de même en tous les cas en ligne droite, le mouvement de dessous en ligne droite suivant les mêmes lois et répondant justement au mouvement de dessus à angles égaux ».

15. Car, si je me suis assez bien fait entendre, vous devez maintenant tirer d'autres conclusions que celles-là des principes de M. Descartes et devez aussi, si je ne me trompe moi-même, avoir reconnu l'erreur du raisonnement duquel vous les aviez tirées. Et partant ne dites plus que le mouvement de la balle et la réfraction ne se ressemblent que par la comparaison imaginaire de M. Descartes; car c'est peut-être la plus juste et la plus claire que l'on puisse apporter pour l'expliquer. Mais, pour cela, il faut considérer la balle sans pesanteur, sans grosseur, sans figure et sans changement en sa vitesse dans toutes les lignes qu'elle parcourt : toutes lesquelles choses peuvent causer une infinité de variétés dans la réflexion et la réfraction d'une balle, mais, pource qu'elles n'ont point de lieu en l'action de la lumière [à laquelle se doit rapporter tout ce qu'il dit], M. Descartes ne les a point considérées dans le mouvement de cette balle dont il parle.

Et principalement il n'a point considéré cette circonstance que je vous prie de remarquer, qui est la plus commune et qui peut donner le plus d'occasion de douter de ce qu'a dit M. Descartes : c'est à savoir

(¹) *Voir* Lettre XCVII, 4.

si la balle au point B a transporté au corps CBE tout le mouvement qui la faisoit tendre en bas, elle doit continuer son mouvement parallèle et rouler sur lui en avançant autant vers la droite qu'elle faisoit auparavant.

13. Que si, nonobstant cela, vous voulez contre toute raison faire cette supposition impossible, qu'elle perde une telle partie de sa vitesse au point B qu'elle ne puisse plus avancer autant vers la droite qu'elle faisoit auparavant, et par conséquent qu'elle ait aussi perdu une partie du mouvement qui la faisoit avancer vers la droite, alors je vous dirai qu'elle roulera sur le diamètre avec la vitesse qui lui reste, tout de même que, lorsque vous supposez que sans rencontrer aucun plan elle vient à perdre de sa vitesse, elle doit continuer son chemin dans la même ligne droite qu'elle avoit commencé à parcourir. Et ainsi il arrivera le même à cette balle que si, ayant été mue avec une certaine vitesse le long du plan CBE, il arrivoit qu'étant au point B (par une supposition impossible et sans aucune cause), elle vînt à perdre une partie de sa vitesse : elle continueroit son chemin sur le même plan avec la vitesse qui lui resteroit.

Mais remarquez que, pour trouver quelque chose de défectueux aux raisonnements de M. Descartes, il en faut venir à des suppositions impossibles, et partant ce ne seroit pas merveille quand d'une impossibilité posée il s'ensuivroit une absurdité.

14. Par tout ce que dessus, il paroit que tout ce que vous dites dans votre seconde lettre (¹) tombe de soi-même et n'a pas besoin de réponse : à savoir que, « si M. Descartes eût pris garde qu'en quelque manière que la vitesse change », c'est-à-dire augmente ou diminue « au point B, la réflexion ne laisse pas de se faire à angles égaux, il n'eût pas été en peine, ni ses amis non plus, de tirer la balle du point B où ils l'ont [vue] malheureusement engagée dans l'exemple de ma dernière lettre. Il n'eût pas soutenu que, la vitesse venant à changer au

(¹) *Voir* Lettre XCVII, 2.

point B, la balle ne reste pas d'avancer vers la droite autant qu'elle faisoit auparavant et n'eût pas déduit, d'un fondement non seulement incertain, mais encore faux, sa proportion des réfractions ».

Tout cela, dis-je, n'étant plus appuyé d'aucunes raisons valables, se détruit de soi-même, aussi bien que ce que vous ajoutez à la fin de la même lettre (1) : à savoir que, le second milieu se pouvant, comme j'ai dit, ouvrir avec une égale facilité de tous côtés pour faire passage à la balle, et que la balle ayant toujours une même aisance à pénétrer le second milieu en toutes sortes d'inclinaisons, il doit suivre, dites-vous, « dans l'application du raisonnement de M. Descartes, qu'en toute sorte de cas la réflexion se fera à angles égaux et que la pénétration se fera de même en tous les cas en ligne droite, le mouvement de dessous en ligne droite suivant les mêmes lois et répondant justement au mouvement de dessus à angles égaux ».

15. Car, si je me suis assez bien fait entendre, vous devez maintenant tirer d'autres conclusions que celles-là des principes de M. Descartes et devez aussi, si je ne me trompe moi-même, avoir reconnu l'erreur du raisonnement duquel vous les aviez tirées. Et partant ne dites plus que le mouvement de la balle et la réfraction ne se ressemblent que par la comparaison imaginaire de M. Descartes; car c'est peut-être la plus juste et la plus claire que l'on puisse apporter pour l'expliquer. Mais, pour cela, il faut considérer la balle sans pesanteur, sans grosseur, sans figure et sans changement en sa vitesse dans toutes les lignes qu'elle parcourt : toutes lesquelles choses peuvent causer une infinité de variétés dans la réflexion et la réfraction d'une balle, mais, pource qu'elles n'ont point de lieu en l'action de la lumière [à laquelle se doit rapporter tout ce qu'il dit], M. Descartes ne les a point considérées dans le mouvement de cette balle dont il parle.

Et principalement il n'a point considéré cette circonstance que je vous prie de remarquer, qui est la plus commune et qui peut donner le plus d'occasion de douter de ce qu'a dit M. Descartes : c'est à savoir

(1) *Voir* Lettre XCVII, 4.

si la balle au point B a transporté au corps CBE tout le mouvement qui la faisoit tendre en bas, elle doit continuer son mouvement parallèle et rouler sur lui en avançant autant vers la droite qu'elle faisoit auparavant.

13. Que si, nonobstant cela, vous voulez contre toute raison faire cette supposition impossible, qu'elle perde une telle partie de sa vitesse au point B qu'elle ne puisse plus avancer autant vers la droite qu'elle faisoit auparavant, et par conséquent qu'elle ait aussi perdu une partie du mouvement qui la faisoit avancer vers la droite, alors je vous dirai qu'elle roulera sur le diamètre avec la vitesse qui lui reste, tout de même que, lorsque vous supposez que sans rencontrer aucun plan elle vient à perdre de sa vitesse, elle doit continuer son chemin dans la même ligne droite qu'elle avoit commencé à parcourir. Et ainsi il arrivera le même à cette balle que si, ayant été mue avec une certaine vitesse le long du plan CBE, il arrivoit qu'étant au point B (par une supposition impossible et sans aucune cause), elle vînt à perdre une partie de sa vitesse : elle continueroit son chemin sur le même plan avec la vitesse qui lui resteroit.

Mais remarquez que, pour trouver quelque chose de défectueux aux raisonnements de M. Descartes, il en faut venir à des suppositions impossibles, et partant ce ne seroit pas merveille quand d'une impossibilité posée il s'ensuivroit une absurdité.

14. Par tout ce que dessus, il paroît que tout ce que vous dites dans votre seconde lettre [1] tombe de soi-même et n'a pas besoin de réponse : à savoir que, « si M. Descartes eût pris garde qu'en quelque manière que la vitesse change », c'est-à-dire augmente ou diminue « au point B, la réflexion ne laisse pas de se faire à angles égaux, il n'eût pas été en peine, ni ses amis non plus, de tirer la balle du point B où ils l'ont [vue] malheureusement engagée dans l'exemple de ma dernière lettre. Il n'eût pas soutenu que, la vitesse venant à changer au

(1) *Voir* Lettre XCVII, 2.

point B, la balle ne reste pas d'avancer vers la droite autant qu'elle faisoit auparavant et n'eût pas déduit, d'un fondement non seulement incertain, mais encore faux, sa proportion des réfractions ».

Tout cela, dis-je, n'étant plus appuyé d'aucunes raisons valables, se détruit de soi-même, aussi bien que ce que vous ajoutez à la fin de la même lettre (¹) : à savoir que, le second milieu se pouvant, comme j'ai dit, ouvrir avec une égale facilité de tous côtés pour faire passage à la balle, et que la balle ayant toujours une même aisance à pénétrer le second milieu en toutes sortes d'inclinaisons, il doit suivre, dites-vous, « dans l'application du raisonnement de M. Descartes, qu'en toute sorte de cas la réflexion se fera à angles égaux et que la pénétration se fera de même en tous les cas en ligne droite, le mouvement de dessous en ligne droite suivant les mêmes lois et répondant justement au mouvement de dessus à angles égaux ».

15. Car, si je me suis assez bien fait entendre, vous devez maintenant tirer d'autres conclusions que celles-là des principes de M. Descartes et devez aussi, si je ne me trompe moi-même, avoir reconnu l'erreur du raisonnement duquel vous les aviez tirées. Et partant ne dites plus que le mouvement de la balle et la réfraction ne se ressemblent que par la comparaison imaginaire de M. Descartes; car c'est peut-être la plus juste et la plus claire que l'on puisse apporter pour l'expliquer. Mais, pour cela, il faut considérer la balle sans pesanteur, sans grosseur, sans figure et sans changement en sa vitesse dans toutes les lignes qu'elle parcourt : toutes lesquelles choses peuvent causer une infinité de variétés dans la réflexion et la réfraction d'une balle, mais, pource qu'elles n'ont point de lieu en l'action de la lumière [à laquelle se doit rapporter tout ce qu'il dit], M. Descartes ne les a point considérées dans le mouvement de cette balle dont il parle.

Et principalement il n'a point considéré cette circonstance que je vous prie de remarquer, qui est la plus commune et qui peut donner le plus d'occasion de douter de ce qu'a dit M. Descartes : c'est à savoir

(¹) *Voir* Lettre XCVII, 4.

Il n'y a qu'un seul quarré en entiers qui, augmenté du binaire, fasse un cube. Le dit quarré est 25.

Il n'y a que deux quarrés en entiers, lesquels, augmentés de 4, fassent un cube. Les dits quarrés sont 4 et 121 (1).

Toutes les puissances quarrées de 2, augmentées de l'unité, sont nombres premiers (2).

Cette dernière question est d'une très subtile et très ingénieuse recherche et, bien qu'elle soit conçue affirmativement, elle est négative, puisque dire qu'un nombre est premier, c'est dire qu'il ne peut être divisé par aucun nombre.

Je mets en cet endroit la question suivante dont j'ai envoyé la démonstration à M. Frenicle, après qu'il m'a avoué et qu'il a même témoigné dans son Écrit imprimé (3) qu'il n'a pu la trouver :

Il n'y a que les deux nombres 1 *et* 7 *qui, étant moindres de l'unité qu'un double quarré, fassent un carré de même nature*, c'est-à-dire qui soit moindre de l'unité qu'un double quarré.

6. Après avoir couru toutes ces questions, la plupart de diverse nature et de différente façon de démontrer, j'ai passé à l'invention des règles générales pour résoudre les équations simples et doubles du Diophante.

On propose, par exemple,

$$2Q + 7967 \text{ égaux à un quarré.}$$

J'ai une règle générale pour résoudre cette équation, si elle est possible, ou découvrir son impossibilité, et ainsi en tous les cas et en tous nombres tant des quarrés que des unités.

(1) *Voir* Lettre LXXXIV, 5. *Cf.* Observ. XLII sur Diophante.

(2) *Voir* Lettre XCVI, 3, 1°.

(3) Cet Écrit, aujourd'hui introuvable, était intitulé *Solutio duorum problematum etc.*, dédié à Kenelm Digby, et commençait comme suit : *En tibi, Vir Illustrissime, Lutetia præbet....* Deux exemplaires en arrivèrent en Hollande, pour Schooten et Huygens, le 26 octobre 1657. En Angleterre, Brouncker en reçut un seulement en décembre.

On propose cette équation double :

$2N + 3$ et $2N + 5$ égaux chacun à un quarré.

Bachet se glorifie, en ses Commentaires sur Diophante ([1]), d'avoir trouvé une règle en deux cas particuliers; je la donne générale en toute sorte de cas et détermine par règle si elle est possible ou non.

J'ai ensuite rétabli la plupart des propositions défectueuses de Diophante et j'ai fait celles que Bachet avoue ne savoir pas et la plupart de celles auxquelles il paroît que Diophante même a hésité, dont je donnerai des preuves et des exemples à mon premier loisir.

7. J'avoue que mon invention pour découvrir si un nombre donné est premier ou non n'est pas parfaite, mais j'ai beaucoup de voies et de méthodes pour réduire le nombre des divisions et pour les diminuer beaucoup en abrégeant le travail ordinaire. Si M. Frenicle baille ce qu'il a médité là dessus, j'estime que ce sera un secours très considérable pour les savans.

8. La question qui m'a occupé sans que j'aie encore pu trouver aucune solution est la suivante, qui est la dernière du Livre de Diophante *De multangulis numeris*.

Dato numero, invenire quot modis multangulus esse possit.

Le texte de Diophante étant corrompu, nous ne pouvons pas deviner sa méthode; celle de Bachet ne m'agrée pas et elle est trop difficile aux grands nombres. J'en ai bien trouvé une meilleure, mais elle ne me satisfait pas encore.

9. Il faut chercher en suite de cette proposition la solution du problème suivant :

Trouver un nombre qui soit polygone autant de fois et non plus qu'on voudra, et trouver le plus petit de ceux qui satisfont à la question.

([1]) *Voir* Observ. XLIV sur Diophante et l'*Appendix* à cette Observation.

10. Voilà sommairement le compte de mes rêveries sur le sujet des nombres. Je ne l'ai écrit que parce que j'appréhende que le loisir d'étendre et de mettre au long toutes ces démonstrations et ces méthodes me manquera; en tout cas, cette indication servira aux savans pour trouver d'eux-mêmes ce que je n'étends point, principalement si MM. de Carcavi et Frenicle leur font part de quelques démonstrations *par la descente* que je leur ai envoyées sur le sujet de quelques propositions négatives. Et peut-être la postérité me saura gré de lui avoir fait connoître que les Anciens n'ont pas tout su, et cette relation pourra passer dans l'esprit de ceux qui viendront après moi pour *traditio lampadis ad filios*, comme parle le grand Chancelier d'Angleterre (1), suivant le sentiment et la devise duquel j'ajouterai (2) :

Multi pertransibunt et augebitur scientia.

CII.

FERMAT A BILLY (3).

26 AOUT 1659.

(Bibliothèque nationale, latin 8600, fol. 13, autographe.)

MON REVEREND PERE,

Je suis bien aise que mes solutions vous ayent pleu et je vous remercie des eloges que vous me donnés, bien que je recognoisse de bonne foi que vous en usés avec un peu trop de profusion. Peust-estre serés vous plus surpris de ce que vous allés lire sur le subject de vostre nouvelle question que vous enoncés en ces termes :

Treuver trois nombres dont le solide estant osté de chacun d'eux et de

(1) BACON, *De dignitate et augmentis scientiarum*, L. VI, cap. 2.

(2) *Voir* page 35, note 2.

(3) Publiée pour la première fois par Libri (*Journal des Savants*, 1839, p. 548).

chacune de leur difference, et du produict du second par le premier ou par le dernier, ou du quarré du milieu, il se fasse tousjours un quarré.

Ces trois nombres sont $\frac{3}{8}$, 1, $\frac{5}{8}$.

Vous adjoustés ensuitte, aprés avoir estendu vostre methode, que vous ne croyés pas qu'il y aist au monde trois autres nombres qui satisfassent à la question, et vous desirés estre esclairci par moi si vous vous trompés en cette creance.

Je vous respons, mon Pere, que cette question reçoit infinies solutions et que la double esgalité à laquelle vous la reduisez :

$$1AA - A + 1 \quad \text{et} \quad 1AA - 3A + 1,$$

chacun desquels termes doit estre faict egal à un quarré, peut estre resolue en infinies manieres.

Je vous advoue que la methode dont je me sers pour cela n'est pas dans les livres, et que c'est une de mes inventions qui a quelquesfois estonné les plus grands maistres et particulierement Monsieur Frenicle, que j'estime trés profond dans la cognoissance des nombres. Mais, puisqu'il semble que Diophante, Viete, Bachet et touts les autres autheurs dont les ouvrages sont venus jusques à moi, n'ont sçu qu'une seule solution en cette nature de questions, je ne suis point surpris que vous, mon Pere, quoyque d'ailleurs tres habille par l'adveu de touts les sçavants, n'ayés point tenté d'estendre vostre cognoissance au dessus de celle que donnent les livres.

Vous changerés sans doute d'advis par mon indication, et vous ne croirés pas cette nouvelle descouverte indigne de vostre recherche, principallement lors que je vous asseurerai, comme je fais à l'advance, que ma methode est generalle et qu'elle sert à resoudre un nombre infini de questions qui ont esté jusqu'ici entierement abandonnées.

Voici trois nombres differents des vostres qui satisfont à vostre question et qui peust-estre vous donneront l'accés aux solutions infinies.

Le premier de ces trois nombres est $\frac{10416}{51865}$, le second est 1, le troisieme est $\frac{41449}{51865}$.

Je suis de tout mon cœur, Mon Reverend Pere, vostre trés humble et trés acquis serviteur,

FERMAT.

A Tolose, le 26 A^t 1659.

(Adresse) : *Au reverend pere, le pere Billy, de la compagnie de Jesus, à Dijon.*

CIII.

FERMAT A CARCAVI (1).

< AOUT 1659. >

(*Correspondance Huygens*, n° 699.)
(Bibl. Nat. fr. 13040, f° 139.)

... Si la ligne spirale n'est pas égale à la parabolique, elle sera ou plus grande ou plus petite.

Soit premièrement plus grande, s'il est possible, et que l'excès de la spirale sur la parabole soit égal à X, dont la moitié soit Z.

Soient inscrites et circonscrites à la parabole et à la spirale des figures comme en la précédente (2), en sorte que la différence entre les inscrites soit moindre que Z, et que la différence entre les circonscrites soit aussi moindre que Z; nous aurons cinq quantités qui vont toujours

(1) Publiée pour la première fois par M. Charles Henry (*Recherches*, p. 174-176). — Ce fragment, envoyé par Carcavi à Huygens dans une lettre datée du 13 septembre 1659, est le développement du dernier théorème de l'*Égalité entre les lignes spirale et parabolique démontrée à la manière des anciens*, laquelle fait partie des *Lettres de A. Dettonville* (Œuvres de Pascal, V, pp. 421 à 453). La démonstration de Pascal, beaucoup plus brève, est faite également par l'absurde, mais sans hypothèse sur le sens de l'inégalité entre la spirale et la parabole.

(2) Fig. 38 des *Lettres de Dettonville*; voir ci-après fig. 93.

en augmentant, savoir : l'inscrite en la parabole, la parabole, la circonscrite à la parabole, la spirale, et la circonscrite à la spirale.

Car il appert que la seconde, qui est la parabole, surpasse son inscrite et que la circonscrite à la parabole surpasse la parabole.

Or il paroit que la quatrième quantité, qui est la spirale, surpasse aussi la circonscrite à la parabole : car, puisque (¹) l'inscrite en la parabole diffère de la circonscrite à la même parabole d'une ligne moindre que Z (ainsi que M. Dettonville l'a démontré), *a fortiori* la parabole même diffère de la circonscrite de moins que Z. Or, par la supposition, la parabole est moindre que la spirale et la différence est 2Z. Donc, puisque la différence entre la parabole et sa circonscrite est moindre que la différence entre la même parabole et la spirale, la circonscrite à la parabole sera moindre que la spirale.

Laquelle spirale étant aussi moindre que sa circonscrite, il paroit que ces cinq quantités, à commencer par l'inscrite en la parabole, vont toujours en augmentant.

Mais puisque l'inscrite en la parabole diffère de la circonscrite d'une ligne moindre que Z, et que, par la construction, la circonscrite susdite à la parabole diffère aussi de la circonscrite à la spirale d'une ligne moindre que Z, donc l'inscrite en la parabole diffère de la circonscrite à la spirale d'une ligne moindre que 2Z.

Nous avons donc la première et la cinquième de ces cinq quantités, qui sont la plus petite et la plus grande, qui diffèrent entre elles de moins que de 2Z. Donc, *a fortiori*, la seconde et la quatrième, qui sont la parabole et la spirale, diffèrent d'une ligne moindre que 2Z et par conséquent moindre que X; ce qui est contre la supposition.

Donc la spirale n'est pas plus grande que la parabole.

Qu'elle soit, s'il est possible, moindre que la parabole, et que l'excès soit X ou 2Z. Il faut faire les inscriptions et circonscriptions comme en la précédente partie de la démonstration. Nous trouverons ici cinq quantités qui vont toujours en diminuant : la circonscrite à la para-

(¹) D'après le corollaire qui, dans les *Lettres de Dettonville*, précède immédiatement le théorème repris par Fermat.

bole, la parabole, l'inscrite en la parabole, la spirale, et l'inscrite en la spirale.

La première paroit évidemment plus grande que la seconde et la seconde que la troisième.

Or on voit aussi que la troisième, qui est l'inscrite en la parabole, surpasse la spirale : car, puisque, par la démonstration de M. Dettonville, l'excès de la circonscrite à la parabole sur l'inscrite en la parabole est moindre que Z, *a fortiori* l'excès de la parabole sur son inscrite est moindre que Z.

Or, la parabole étant plus grande que la spirale, et son excès sur la dite spirale étant, par la supposition, 2Z, la parabole surpasse la spirale d'une plus grande quantité que celle dont elle surpasse l'inscrite en la parabole, et, partant, l'inscrite en la parabole est plus grande que la spirale.

Nous avons donc cinq quantités qui vont toujours en diminuant, savoir : la circonscrite à la parabole, la parabole, l'inscrite en la parabole, la spirale, et l'inscrite en la spirale. Or la circonscrite à la parabole diffère de son inscrite de moins que Z, et l'inscrite en la dite parabole diffère aussi, par la construction, de l'inscrite en la spirale de moins que Z. Donc la circonscrite à la parabole, qui est la première des cinq quantités et la plus grande, diffère de la dernière des dites quantités, qui est la plus petite, d'une ligne moindre que 2Z. Donc, *a fortiori*, la seconde quantité diffère de la quatrième, c'est-à-dire la parabole de la spirale, de moins que de 2Z, c'est-à-dire de moins que de X : ce qui est contre la supposition.

D'où il résulte que la spirale n'est pas plus petite que la parabole; et partant, puisqu'elle n'est ni plus petite, ni plus grande, elle est égale, ce qu'il etc.

CIV.

FERMAT A CARCAVI (1).

< SEPTEMBRE 1659 >

(*Correspondance Huygens*, n° 700.)
(Bibl. nat. fr. 13040, f° 139-140.)

1. J'envoyai l'année passée à M. Frenicle la démonstration par laquelle je prouvois qu'il n'y a aucun nombre que le seul 7 qui, étant le double d'un quarré — 1, soit la racine d'un quarré de la même nature, car 49 est le double d'un quarré, 25, — 1.

2. Je veux même que M. de Zulichem voie que cette comparaison des lignes spirales et paraboliques se peut rendre plus générale, et peut-être sera-t-il surpris de lire la proposition suivante, dont je lui garantis la vérité :

En la figure 38 de M. Dettonville (*fig.* 94), on peut considérer les spirales quarrées, cubiques, quarréquarrées, etc., tout de même que les paraboles cubiques, quarréquarrées, etc.

Si la spirale ordinaire, en laquelle comme toute la circonférence à la portion E8B, ainsi la droite BA à la droite AC, se compare avec la parabole ordinaire en laquelle comme la droite RA à la droite 6A, ainsi le quarré de la droite RP est au quarré de la droite 6Q, et le rapport est tel :

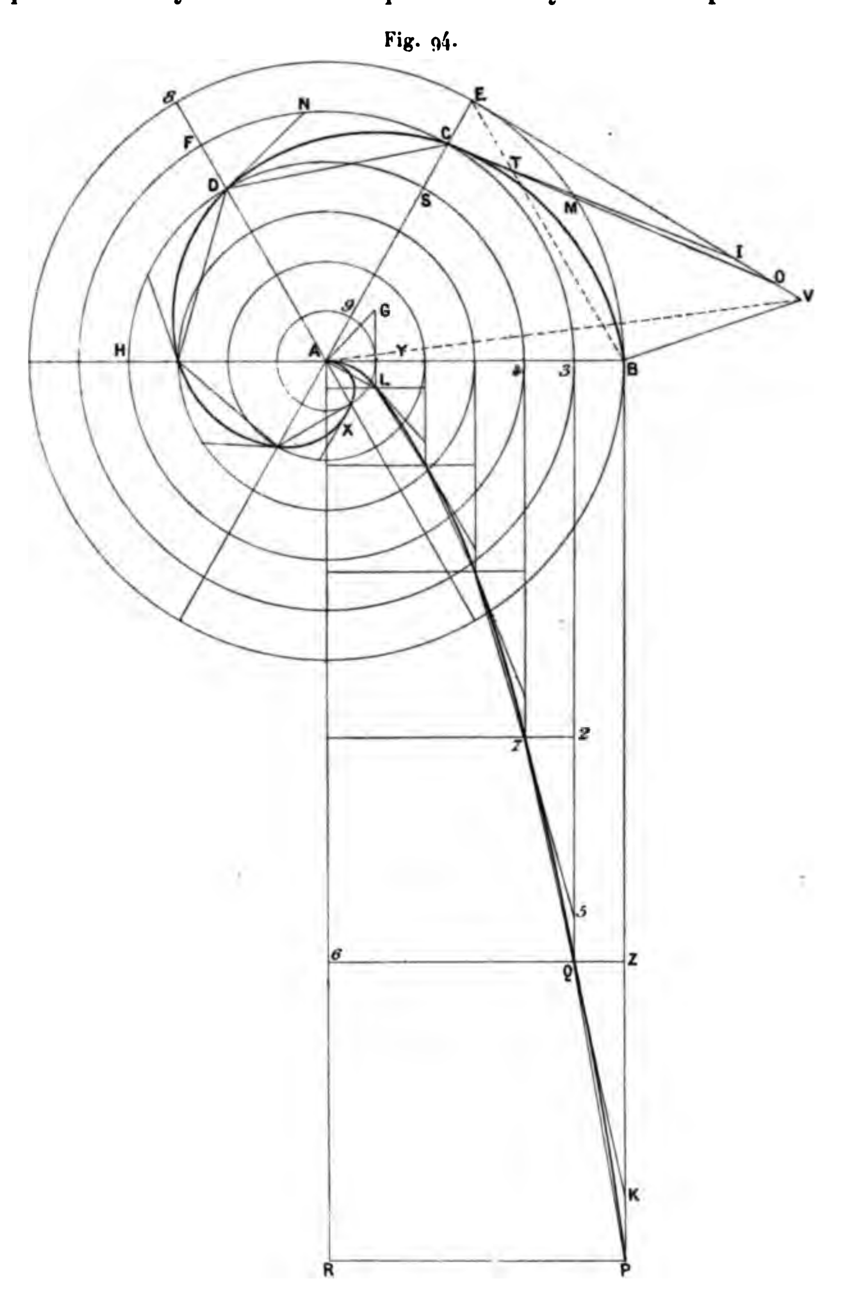
Si AR est faite égale à $\frac{1}{2}$ de la circonférence totale, et l'appliquée RP au rayon AB, la ligne parabolique PQA sera égale à la spirale BCDA, comme le démontre M. Dettonville.

Mais en prenant la spirale quarrée, qui est celle du second genre, en laquelle comme toute la circonférence est à la portion E8B, ainsi

(1) Publiée pour la première fois par M. Charles Henry (*Recherches*, p. 176-177). — Cet extrait, envoyé par Carcavi à Huygens en même temps que le précédent, provient d'une lettre postérieure de Fermat.

le quarré du rayon AB est au quarré du rayon AC, on peut la com-

Fig. 94.



parer avec la parabole cubique, qui est la parabole du second genre.

Soit fait, en la parabole cubique, l'axe AR égal aux $\frac{2}{3}$ de la circonfé-

rence totale, et l'appliquée RP aussi égale au rayon AB; la parabole AP du second genre sera égale à la spirale du second genre BCDA.

Si la spirale est cubique, il la faudra comparer avec la parabole quarréquarrée, et faire les $\frac{3}{4}$ de la circonférence totale égaux à l'axe AR de la parabole quarréquarrée, et l'appliquée RP toujours égale au rayon AB.

La parabole quarréquarrée PQA, du troisième genre, sera égale à la spirale cubique du troisième genre en laquelle comme toute la circonférence à la portion E8B, ainsi le cube du rayon AB au cube du rayon AC; et à l'infini, en augmentant toujours chaque numérateur et dénominateur de la fraction, de l'unité :

L'axe de la parabole ordinaire étant ... $\frac{1}{2}$ de la circonférence,
L'axe de la parabole cubique.......... $\frac{2}{3}$ de la même circonférence,
L'axe de la parabole quarréquarrée ... $\frac{3}{4}$
L'axe de la parabole quarrécubique ... $\frac{4}{5}$
Puis .... $\frac{5}{6}$, etc.

D'où il est aisé de conclure qu'il y a des spirales dans cette progression qui sont plus grandes que la circonférence du cercle qui les produit, mais qu'elles sont toujours moindres que la somme de ladite circonférence et du rayon.

Voilà un paradoxe géométrique, sur lequel peut-être M. Dettonville et M. de Zulichem n'ont pas encore rêvé. En tout cas, je les supplie de croire que je ne l'ai point de personne, et que ma méthode dont vous avez le chiffre longtemps avant que le Livre de M. Dettonville parût, est la source de beaucoup d'autres belles découvertes sur le sujet des lignes courbes comparées, ou avec des droites, ou avec d'autres lignes courbes de diverse nature. Je vous en dirai peut-être un jour qui vous surprendront.

3. M. de Zulichem désire encore savoir si ma méthode s'étend à trouver la dimension des surfaces courbes des conoïdes et des sphéroïdes. Vous pouvez l'assurer que oui, et qu'elle va encore bien plus loin. Il m'entendra assez lorsque je lui assurerai :

1° Que je n'ai point vu aucune de ses propositions sur ce sujet;

2° Que la surface du conoïde parabolique autour de l'axe se trouve par la règle et le compas et est un problème plan;

Que les surfaces des conoïdes hyperboliques et sphéroïdes supposent la quadrature de l'hyperbole et quelques fois de l'ellipse,

Et qu'enfin le conoïde parabolique autour de l'appliquée fait une surface courbe qui suppose, pour être exactement mesurée, la quadrature de l'hyperbole.

Je puis même donner une ligne droite égale à toute portion de parabole donnée, en supposant la quadrature de l'hyperbole, c'est-à-dire de l'espace hyperbolique.

J'ajouterois toutes les constructions de mes propositions, mais le loisir me manque.

ANNÉE 1660.

CV.

FERMAT A CARCAVI [1].

< FÉVRIER 1660 >

(*Corresp. Huyg.*, n° 727.)

... On peut considérer les roulettes allongées ou raccourcies d'une autre manière que n'a fait M. Dettonville :

Supposez qu'en la roulette ordinaire les seules appliquées soient allongées ou raccourcies proportionnellement, c'est-à-dire que, l'axe demeurant le même, chacune des appliquées est augmentée de la moitié ou bien raccourcie de la moitié, auquel cas il se produit des courbes nouvelles : celles des appliquées allongées sont au dehors de la roulette et celles des appliquées raccourcies sont au dedans.

Je dis que toutes les roulettes allongées en ce sens sont égales à la somme d'une ligne droite et d'une circulaire, et que toutes les roulettes accourcies au même sens sont égales à des courbes paraboliques.

Par exemple, soit une roulette allongée dont les appliquées soient aux appliquées de la roulette naturelle comme le diamètre d'un quarré à son côté, je dis que cette roulette allongée, prise tout entière, c'est-à-dire des deux côtés, et que par la construction vous voyez être plus grande que la naturelle, est égale à la circonférence

(1) Fragment envoyé par Carcavi à Huygens le 6 mars 1660. — Publié pour la première fois par M. Ch. Henry (*Pierre de Carcavy*, p. 31).

du cercle générateur de la roulette naturelle et au double de son diamètre.

Je pourrois ajouter le théorème général pour tous ces cas, c'est-à-dire pour l'invention des paraboles égales aux roulettes accourcies et pour l'invention de l'agrégé des droites et des circulaires égales aux allongées. Mais ce sera pour une autre fois. Ma méthode générale ne dépend que du chiffre que je vous envoyai l'année passée, avant que j'eusse vu le Livre de M. Dettonville....

CVI.

FERMAT A CARCAVI (1).

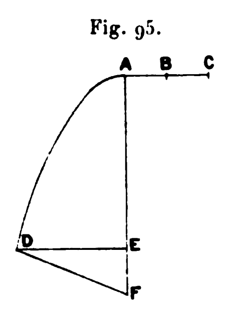
< JUIN 1660 >

(*Corresp. Huyg.*, n° 755.)

... 1. Datâ quadraturâ hyperboles, datur circulus æqualis superficiei curvæ paraboles circa applicatam rotatæ.

Sit data parabole AD (*fig.* 95), cujus axis AE, applicata seu semi-

Fig. 95.



basis DE, rectum latus ABC. Quæritur circulus æqualis superficiei curvæ solidi quod ex rotatione figuræ ADE circa applicatam DE tanquam immobilem circumductæ conficitur.

(1) Fragments envoyés par Carcavi à Huygens le 25 juin 1660. — Publiés pour la première fois par M. Ch. Henry (*Pierre de Carcavy*, p. 33-34).

Bisecetur latus rectum AC in B et axi AE ponatur in directum recta EF æqualis rectæ AB seu dimidio recti lateris, et jungatur DF.

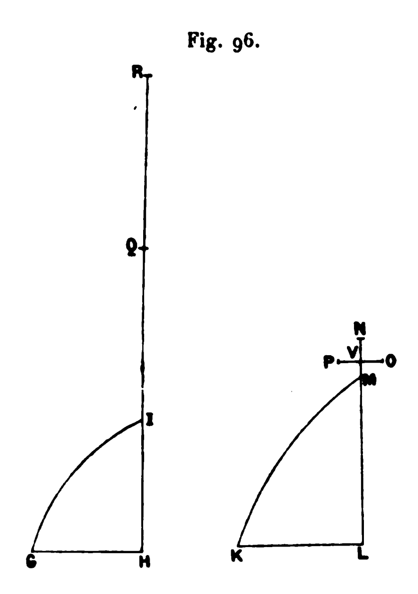
Exponatur separatim recta IQ (*fig.* 96) æqualis axi AE, cujus dupla sit recta IR; fiat

ut FE sive AB ad DF, ita recta QI ad rectam QH,

et a puncto H ducatur HG perpendicularis ad HIR, et fiat HG æqualis rectæ DE. Per punctum I tanquam verticem describatur hyperbole cujus transversum latus sit recta IR, centrum Q, et transeat hyperbole per punctum G et sit IG.

Describatur item alia hyperbole separatim (*fig.* 96), cujus transversum latus MN sit æquale quartæ parti recti paraboles lateris, hoc est

Fig. 96.

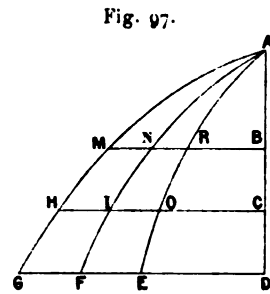


quartæ parti rectæ AC; centrum vero sit V, rectum latus OVP æquale transverso lateri. Sit autem hyperbole ita descripta MK, cujus vertex M, axis ML qui continuetur donec recta ML sit æqualis axi paraboles AE, et ducatur perpendicularis seu applicata LK. A rectangulo sub QH in HG deducantur duo spatia hyperbolica IGH, MKL, quorum quadraturæ supponuntur, et quod supererit æquetur quadrato.

Diagonia istius quadrati erit radius circuli superficiei curvæ, cujus dimensionem quærimus, æqualis ([1]).

2. Esto cyclois primaria ANIF (*fig.* 97), cujus axis AD, semibasis DF, et ab eâ formentur aliæ curvæ vel extra ipsam vel intra, quarum applicatæ sint semper in eàdem ratione datâ ad applicatas primariæ cycloidis.

Fig. 97.



Exempli gratia, in curva exteriori AMHG ducantur applicatæ GFD, HIC, MNB; ratio autem GD ad DF sit data et sit semper eadem quæ HC ad CI et MB ad BN. In curvâ autem interiori AROE, ratio FD ad DE sit data et sit semper eadem quæ IC ad CO et NB ad RB.

Dico contingere ut curvæ exteriores, qualis est AMHG, sint semper æquales aggregato lineæ circularis et lineæ rectæ; curvæ autem interiores, qualis est AROE, sint semper æquales parabolis primariis sive Archimedeis.

Theorematis generalis enunciationem, quando volueris, exhibebo, imo et demonstrationem ([2]).

(*Correspondance Huygens*, n° 756.)

3. Pour me sauver un peu de l'accusation de M. de Zulychem, qui dit que mes spirales n'ont pas des propriétés qui soient autrement considérables ([3]), vous pourrez, si vous voulez, lui proposer celle qui suit :

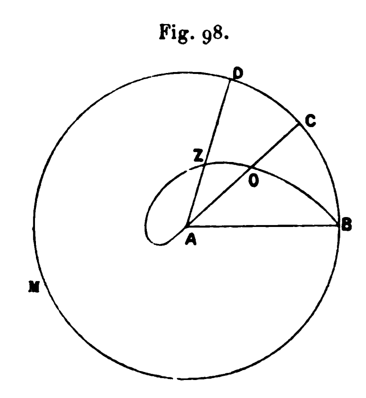
([1]) *Comparer* la Proposition II à Lalouvère, t. I, p. 200.
([2]) *Comparer* la proposition IV à Lalouvère, t. I, p. 202 et suiv.
([3]) Lettre de Huygens à Carcavi du 26 février 1660 (*Corr. Huyg.*, n° 722) : « La comparaison des autres sortes de spirales avec les lignes paraboloïdes que donne M. de

Soit le cercle BCDM (*fig.* 98), duquel le centre A et le rayon AB, et soit la spirale BOZA de laquelle la propriété soit telle :

BA est à OA comme le quarré de toute la circonférence BCDMB
au quarré de la portion de la même circonférence CDMB.

Cette spirale, par mon théorème général, est égale à une parabole en laquelle les cubes des appliquées sont en même raison que les quarrés des portions de l'axe, laquelle parabole est égale à une ligne droite.

Fig. 98.



J'espère que cette propriété suffira pour me réconcilier avec M. Zulychem et, puisque je lui cède tous mes droits sur les surfaces courbes des sphéroïdes et conoïdes, je souhaiterois qu'en revanche il m'indiquât s'il sait aucune surface courbe égale à un quarré par voie purement géométrique et pareille à celle dont je me suis servi en donnant des droites égales à des courbes.

Fermat est véritable, mais non pas fort difficile à trouver après que la première est connue, et je m'étonne qu'il prend plaisir à inventer des lignes nouvelles qui n'ont pas autrement des propriétés dignes de considération. » Cp. la Pièce CIV.

CVII.

FERMAT A PASCAL.

DIMANCHE 25 JUILLET 1660.

(*Œuvres de Pascal*, IV, p. 445.)

Monsieur,

Dès que j'ai su que nous sommes plus proches l'un de l'autre que nous n'étions auparavant, je n'ai pu résister à un dessein d'amitié dont j'ai prié M. de Carcavi d'être le médiateur : en un mot je prétends vous embrasser et converser quelques jours avec vous; mais, parce que ma santé n'est guère plus forte que la vôtre, j'ose espérer qu'en cette considération vous me ferez la grâce de la moitié du chemin, et que vous m'obligerez de me marquer un lieu entre Clermont et Toulouse, où je ne manquerai pas de me rendre vers la fin de septembre ou le commencement d'octobre.

Si vous ne prenez pas ce parti, vous courrez hasard de me voir chez vous et d'y avoir deux malades en même temps. J'attends de vos nouvelles avec impatience et suis de tout mon cœur,

Tout à vous,

Fermat.

A Toulouse, le 25 juillet 1660.

CVIII.

PASCAL A FERMAT.

MARDI 10 AOUT 1660.

(*Œuvres de Pascal*, IV, p. 446-448.)
(*Va*, p. 200.)

Monsieur,

Vous êtes le plus galant homme du monde et je suis assurément un de ceux qui sais le mieux reconnoître ces qualités-là et les admirer

infiniment, surtout quand elles sont jointes aux talents qui se trouvent singulièrement en vous. Tout cela m'oblige à vous témoigner de ma main ma reconnoissance pour l'offre que vous me faites, quelque peine que j'aie encore d'écrire et de lire moi-même; mais l'honneur que vous me faites m'est si cher que je ne puis trop me hâter d'y répondre.

Je vous dirai donc, Monsieur, que si j'étois en santé, je serois volé à Toulouse et que je n'aurois pas souffert qu'un homme comme vous eût fait un pas pour un homme comme moi. Je vous dirai aussi que, quoique vous soyez celui de toute l'Europe que je tiens pour le plus grand géomètre, ce ne seroit pas cette qualité-là qui m'auroit attiré, mais que je me figure tant d'esprit et d'honnêteté en votre conversation que c'est pour cela que je vous rechercherois.

Car, pour vous parler franchement de la Géométrie, je la trouve le plus haut exercice de l'esprit : mais en même temps je la connois pour si inutile que je fais peu de différence entre un homme qui n'est que géomètre et un habile artisan. Aussi je l'appelle le plus beau métier du monde, mais enfin ce n'est qu'un métier, et j'ai dit souvent qu'elle est bonne pour faire l'essai, mais non pas l'emploi de notre force.

De sorte que je ne ferois pas deux pas pour la Géométrie et je m'assure que vous êtes fort de mon humeur. Mais il y a maintenant ceci de plus en moi que je suis dans des études si éloignées de cet esprit-là qu'à peine me souviens-je qu'il y en ait. Je m'y étois mis, il y a un an ou deux, par une raison tout à fait singulière, à laquelle ayant satisfait, je suis au hasard de ne jamais plus y penser.

Outre que ma santé n'est pas encore assez forte, car je suis si foible que je ne puis marcher sans bâton ni me tenir à cheval, je ne puis même faire que trois ou quatre lieues au plus en carrosse. C'est ainsi que je suis venu de Paris ici en vingt-deux jours. Les médecins m'ordonnent les eaux de Bourbon pour le mois de septembre, et je suis engagé, autant que je puis l'être, depuis deux mois d'aller de là en Poitou par eau jusqu'à Saumur, pour demeurer jusqu'à Noël avec M. le duc de Roannès, gouverneur de Poitou, qui a pour moi des

sentimens que je ne vaux pas. Mais, comme je passerai par Orléans en allant à Saumur par la rivière, si ma santé ne me permet pas de passer outre, j'irai de là à Paris.

Voilà, Monsieur, tout l'état de ma vie présente, dont je suis obligé de vous rendre compte pour vous assurer de l'impossibilité où je suis de recevoir l'honneur que vous daignez m'offrir et que je souhaite de tout mon cœur de pouvoir un jour reconnoître, ou en vous, ou en Messieurs vos enfants, auxquels je suis tout dévoué, ayant une vénération particulière pour ceux qui portent le nom du premier homme du monde.

Je suis, etc. PASCAL.

De Bienassis, le 10 août 1660.

CIX.

FERMAT A HUYGENS (1).

DÉCEMBRE 1660.

(*Correspondance de Huygens*, n° 824.)

MONSIEUR,

J'ai appris avec joie, mais non sans quelque espèce de jalousie, que mes amis de Paris ont l'honneur de vous posséder depuis quelque temps. Je vous assure, Monsieur, que, si ma santé étoit assez forte pour les voyages, j'irois avec grand plaisir prendre ma part de leur bonheur. Ce n'est pas d'aujourd'hui, ni par la relation seule de M. de Carcavi, que je suis persuadé de vos qualités tout extraordinaires. J'étois à vous avant que vous fussiez en France et, lorsqu'on m'a demandé mon sentiment de votre *Saturne*, j'ai répondu hardiment et sans même

(1) Publiée pour la première fois par M. Charles Henry (*Recherches*, p. 77-78). — Carcavi remit cette lettre à Huygens, alors à Paris, le 27 décembre 1660. L'autographe est conservé à la Bibliothèque de l'Université de Leyde, manuscrit Huygens, 30.

l'avoir encore vu que, puisqu'il partoit de votre main, il ne pouvoit manquer quoi que ce soit à sa perfection. Vos autres ouvrages que j'ai vus et admirés m'ont obligé d'en parler de la sorte et j'ai eu plus de raison d'en user ainsi que celui

Qui nunquam visæ flagrabat amore puellæ [1].

Votre grande et juste réputation est le seul et véritable garant de tous vos livres. Il me tarde de les voir et de me confirmer par leur lecture au jugement que j'en ai fait par avance et en la passion que vos autres écrits m'ont donnée, d'être toute ma vie avec grand respect, Monsieur, votre très humble et très obéissant serviteur,

FERMAT.

(1) Juvénal, Sat. IV, 113.

ANNÉE 1661.

CX.

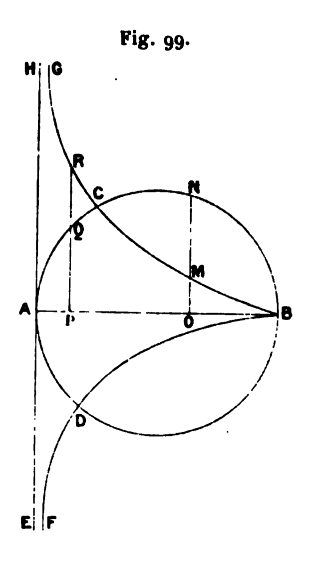
FERMAT A CARCAVI (1).

1661.

(*Corresp. Huyg.*, n° 949.)

... Soit la courbe de Diocle BCRG (*fig.* 99) et BDF de l'autre côté du cercle, qui a cette propriété connue qu'en prenant quelconque point

Fig. 99.



au cercle, comme N ou Q, les quatre lignes AO, ON, OB, OM sont con-

(1) Fragment envoyé par Carcavi à Huygens, le 1er janvier 1662, en même temps que le morceau latin *De cissoide* imprimé Tome I, p. 285-288. — Il a été publié pour la première fois par M. Ch. Henry (*Pierre de Carcavy*, p. 27).

tinuement proportionnelles et de même les quatre lignes AP, PQ, PB, PR.

Or, cette courbe s'étend des deux côtés à l'infini, et la droite HAE, qui touche le cercle en A, est son asymptote.

La proposition est que tout l'espace GRBDF, compris entre la courbe et l'asymptote étendue à l'infini, est triple du cercle générateur ACBD.

J'ai aussi la mesure des solides, des centres de gravité des portions, et de tout le reste....

CXI.

FERMAT A SÉGUIER (1).

MARDI 13 DÉCEMBRE 1661.

(Bibl. Nat. fr. 17398, f° 433.)

Monseigneur,

J'ai desia pris la liberté d'aller tout droit à vous sans me servir d'aucune recommandation estrangere pour vous demender grace et iustice pour mon fils (2). Il a depuis peu traitté d'un office de con^er en la Chambre des requestes de ce parlement que i'ai cy devant excercé. Il vous sera, Monseigneur, iustifié par actes qu'il a l'aage et le temps de la postulation requis par les ordonnances. Et quoique son traitté soit anterieur au reglement de Sa Maiesté que nous venons de recevoir, il ne restera pas, Monseigneur, de vous produire toutes les preuves qu'il exige, et d'y adiouster mesme la sousmission contenue dans ladite declaration. Je n'ai, Monseigneur, a vous demender que la dispense de la presentation qu'il vous doit faire en personne de touts ses actes aux termes de ce reglement. Je n'implore pour cela que vostre cognoissance et vostre

(1) Publiée pour la première fois par M. Charles Henry d'après l'autographe (*Recherches*, p. 70-72).

(2) Clément-Samuel, fils ainé de Fermat. Son cadet, Jean, reçut les ordres et devint archidiacre.

memoire, et ie ne doubte pas que Monsieur de La Chambre ne vous fasse souvenir, Monseigneur, que mond. fils vous rendist ses respects en personne en l'année mil six cens cinquante sept, et que Monseigneur le Duc de Sulli ne vous dise quelque parolle favorable pour une famille qui vous est entierement devouée et qui vous est acquise avec toute dependance. J'attens cette seule grace de vostre bonté et suis avec tres grand respect

Monseigneur

Votre tres humble et tres obeissant serviteur

FERMAT.

A Tolose, le 13 dec. 1661.

ANNÉE 1662.

CXII.

FERMAT A C. DE LA CHAMBRE.

DIMANCHE 1 JANVIER 1662.

(D., III, 51; *Correspondance Huygens*, n° 990.)
Bibl. Nat. fr. n. a. 3280.

MONSIEUR,

1. Il est juste de vous obéir et de terminer enfin par votre entremise le vieux démêlé qui a été depuis si longtemps entre M. Descartes et moi sur le sujet de la réfraction, et peut-être serai-je assez heureux pour vous proposer une paix que vous trouverez avantageuse à tous les deux partis.

Je vous ai dit autrefois, dans ma première lettre (1), que M. Descartes n'a jamais démontré son principe; car, outre que les comparaisons ne servent guère à fonder des démonstrations, il emploie la sienne à contre-sens et suppose même que le passage de la lumière est plus aisé par les corps durs que par les rares, ce qui est apparemment faux. Je ne vous redis rien du défaut de la démonstration en elle-même, quand bien la comparaison dont il se sert seroit bonne et admissible en cette matière, pource que j'ai traité tout cela bien au long dans mes lettres à M. Descartes pendant sa vie, ou dans celles que j'ai écrites à M. Clerselier depuis sa mort (2).

(1) Lettre LXXXVI.
(2) Les Lettres à Mersenne XXII et XXIV, à Clerselier XC, XC *bis*, XCV, XCVII.

2. J'ajoute seulement qu'ayant vu le même principe de M. Descartes dans plusieurs auteurs qui ont écrit après lui, leurs démonstrations, non plus, ne me paroissent point recevables et ne méritent point de porter ce nom : Hérigone [1] se sert, pour le démontrer, des équipondérants et de la raison des poids sur les plans inclinés ; le Père Maignan [2] y veut parvenir d'une autre manière. Mais il est aisé de voir qu'ils ne démontrent ni l'un ni l'autre, et qu'après avoir lu et examiné avec soin leurs démonstrations, nous sommes aussi incertains de la vérité des principes qu'après avoir lu M. Descartes.

Pour sortir de cet embarras et tâcher de trouver la véritable raison de la réfraction, je vous indiquai dans ma lettre que, si nous voulions employer dans cette recherche ce principe si commun et si établi, que *la nature agit toujours par les voies les plus courtes,* nous pourrions y trouver facilement notre compte. Mais parce que vous doutâtes d'abord que la nature, en conduisant la lumière par les deux côtés d'un triangle, puisse jamais agir par une voie aussi courte que si elle la conduisoit par la base ou par la soustendante, je m'en vais vous faire voir le contraire de votre sentiment ou plutôt de votre doute, par un exemple aisé.

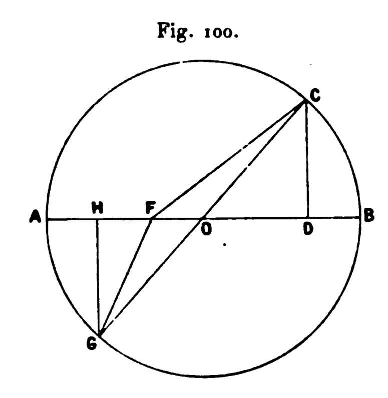
3. Soit, en la figure à part (*fig.* 100), le cercle ACBG, duquel le diamètre soit AOB, le centre O et un autre diamètre GOC. Des points G et C soient tirées les perpendiculaires sur le premier diamètre, GH, CD. Supposons que le premier diamètre AOB sépare deux milieux différents, dont l'un qui est celui de dessous, AGB, soit le plus dense et celui de dessus, ACB, soit le plus rare, en telle sorte, par exemple, que le passage par le plus rare soit plus aisé que celui par le plus dense en raison double.

(1) Cursus mathematicus tomus quintus, Paris, chez Simeon Piget, MDCXLIV, p. 129-130. Axiome V : « Les puissances de pénétrer divers mediums diaphanes, qu'ont les rayons optiques, s'augmentent ou diminuent proportionnellement par la mutation des mediums ; et il y a mesme proportion entre les puissances des rayons d'incidence et de réfraction qu'entre les pressemens qu'ils recevroient des poids égaux s'ils en soustenoient. »

(2) Perspectiva horaria seu de horographia gnomonica tum theoretica tum practica libri quatuor. Rome, 1648 ; in-fol., pages 631-647.

Il suit de cette supposition que le temps qu'emploie le mobile ou la lumière de C en O est moindre que celui qui les conduit de O en G, et que le temps du mouvement de C en O, qui se fait dans le milieu le plus rare, n'est que la moitié du temps du mouvement de O en G. Et par conséquent la mesure du mouvement entier par les deux droites CO

Fig. 100.



et OG peut être représentée par la somme de la moitié de CO et de la totale OG; de même, si vous prenez un autre point, comme F, le temps du mouvement par les deux droites CF et FG peut être représenté par la somme de la moitié de CF et de la totale FG.

Supposons maintenant que le rayon CO soit 10, et par conséquent le diamètre total COG sera 20; que la droite HO soit 8, la droite OD soit aussi 8; et qu'enfin la droite OF ne soit que 1. Je dis qu'en ce cas le mouvement qui se fait par la droite COG se fera en un temps plus long que celui qui se fait par les deux côtés du triangle CF, FG.

Car si nous prouvons que la moitié de CO, jointe à la totale OG, contient plus que la moitié de CF jointe à la totale FG, la conclusion sera manifeste, puisque ces deux sommes sont justement la mesure du temps de ces deux mouvements. Or la somme de la moitié de CO et de la totale OG fait justement 15, et il est évident par la construction que la droite CF est égale à la racine quarrée de 117 et que la droite FG est égale à la racine quarrée de 85. Mais la moitié de la première racine, jointe à la seconde, fait moins que $\frac{59}{4}$, et $\frac{59}{4}$ sont encore moindres que 15. Donc la somme de la moitié de CF et de la totale FG

est moindre que la somme de la moitié de CO et de la totale OG, et partant le mouvement par les deux droites CF, FG se fait plus tôt et en moins de temps que par la base ou soustendante COG.

4. Je suis venu jusques-là sans beaucoup de peine, mais il a fallu porter la recherche plus loin et, parce que, pour satisfaire à mon principe, il ne suffit pas d'avoir trouvé un point comme F, par où le mouvement naturel se fait plus vite, plus aisément et en moins de temps que par la droite COG, mais [qu]'il faut encore trouver le point qui fait la conduite en moins de temps que quelque autre que ce soit, pris des deux côtés, il m'a été nécessaire d'avoir en cette occasion recours à ma méthode *de maximis et minimis*, qui expédie cette sorte de questions avec assez de succès.

Dès que j'ai voulu entreprendre cette analyse, j'ai eu deux obstacles à surmonter : le premier, que, bien que je fusse assuré de la vérité de mon principe, qui est qu'il n'y ait rien de si probable ni de si apparent que cette supposition, que la nature agit toujours par les moyens les plus aisés, c'est-à-dire ou par les lignes les plus courtes, lorsqu'elles n'emportent pas plus de temps, ou en tout cas par le temps le plus court, afin d'accourcir son travail et de venir plus tôt à bout de son opération (ce que le précédent calcul confirme, d'autant plus qu'il paroit que la lumière a plus de difficulté à traverser les milieux denses que les rares, puisque vous voyez que la réfraction vise vers la perpendiculaire dans mon exemple, ainsi que l'expérience le confirme, ce qui pourtant est contraire à la supposition de M. Descartes), néanmoins j'ai été averti de tous côtés, et principalement par M. Petit, que j'estime infiniment, que les expériences s'accordent exactement avec la proportion que M. Descartes a donnée aux réfractions, et que, bien que sa démonstration soit fautive, il est à craindre que je tenterai inutilement d'introduire une proportion différente de la sienne, et que les expériences qui se feront après que j'aurai publié mon invention la pourront détruire sur l'heure.

Le second obstacle qui s'est opposé à ma recherche a été la longueur

et la difficulté du calcul, qui, dans la résolution du problème dont je vous parlai dans ma lettre et que je vous témoignois n'être pas des plus aisés, présente d'abord quatre lignes par leurs racines quarrées et engage par conséquent en des asymmétries qui aboutissent à une très grande longueur.

Je me suis défait du premier obstacle par la connoissance que j'ai qu'il y a infinies proportions, différentes de la véritable, qui approchent d'elle si insensiblement qu'elles peuvent tromper les plus habiles et les plus exacts observateurs. Ainsi n'y ayant que le second obstacle à vaincre, je m'étois résolu très souvent d'employer la bien-aimée (1) Géométrie (c'est ainsi que Plutarque l'appelle) pour vous satisfaire et pour me satisfaire moi-même. Mais l'appréhension de trouver, après une longue et pénible opération, quelque proportion irrégulière et fantasque, et la pente naturelle que j'ai vers la paresse, ont laissé la chose en cet état, jusqu'à la dernière semonce que M. le Président [de] Miremont vient de me faire de votre part, que je prends pour une loi plus forte que ni mon appréhension ni ma paresse : si bien que je me suis résolu de vous obéir sans autre retardement.

5. J'ai donc procédé sans remise en vertu de l'obédience, comme parlent les moines, à l'exécution de vos ordres, et j'ai fait l'entière analyse en forme, dans laquelle le désir passionné que j'ai eu de vous satisfaire m'a inspiré une route qui a abrégé la moitié de mon travail et qui a réduit les quatre asymmétries que j'avois eu en vue la première fois à deux tant seulement, ce qui m'a notablement soulagé.

Mais le prix de mon travail a été le plus extraordinaire, le plus imprévu et le plus heureux qui fut jamais. Car, après avoir couru par toutes les équations, multiplications, antithèses et autres opérations de ma méthode, et avoir enfin conclu le problème que vous verrez dans un feuillet séparé (2), j'ai trouvé que mon principe donnoit justement

(1) PLUTARQUE, *Marcellus*, XIV, 5 : Τὴν γὰρ ἀγαπωμένην ταύτην....
En fait, il s'agit dans ce passage, relatif à Archimède, de Mécanique, non de Géométrie.
(2) Voir l'*Analysis ad refractiones*, t. I, p. 170 et suiv.

et précisément la même proportion des réfractions que M. Descartes a établie.

J'ai été si surpris d'un événement si peu attendu, que j'ai peine à revenir de mon étonnement. J'ai réitéré mes opérations algébraïques diverses fois et toujours le succès a été le même, quoique ma démonstration suppose que le passage de la lumière par les corps denses soit plus malaisé que par les rares, ce que je crois très vrai et indisputable, et que néanmoins M. Descartes suppose le contraire.

Que devons-nous conclure de tout ceci? Ne suffiroit-il pas, Monsieur, aux amis de M. Descartes que je lui laisse la possession libre de son théorème? N'aura-t-il pas assez de gloire d'avoir connu les démarches de la nature dans la première vue et sans l'aide d'aucune démonstration? Je lui cède donc la victoire et le champ de bataille, et je me contente que M. Clerselier me laisse entrer du moins dans la société de la preuve de cette vérité si importante, et qui doit produire des conséquences si admirables.

6. J'ajoute même, en faveur de son ami, qu'il semble que cette grande vérité naturelle n'a pas osé tenir devant ce grand génie, et qu'elle s'est rendue et découverte à lui sans s'y laisser forcer par la démonstration, à l'exemple de ces places qui, quoique bonnes d'ailleurs et de difficile prise, ne laissent pas, sur la seule réputation de celui qui les attaque, de se rendre sans attendre le canon.

Je vous annonce donc, Monsieur, j'annonce à M. Clerselier et à tous les amis de M. Descartes qu'il ne tiendra plus à l'incrédulité des géomètres qu'on ne doive attendre les merveilles que M. Descartes a fait espérer avec raison de ses lunettes elliptiques et hyperboliques, pourvu qu'on puisse trouver des ouvriers assez habiles pour les faire et pour les ajuster.

Il resteroit encore une petite difficulté que la comparaison de M. Descartes semble produire. C'est qu'il ne paroît pas encore pourquoi la balle qui est poussée dans l'eau n'approche pas de la perpendiculaire, ainsi que la lumière; mais, outre qu'on pourroit soupçonner que la

réflexion se mêle dans cet exemple à la réfraction, et que la figure ou la gravité peuvent contribuer à la différence de ce mouvement, je n'ai garde d'entrer dans une matière purement physique. Ce seroit entreprendre sur vous, Monsieur, qui en êtes le maître, et faire irruption dans votre domaine.

Je finis donc après vous avoir déclaré que je consens, si vous le trouvez à propos, que l'accommodement entre les Cartésiens et moi soit publié dans les Académies, [et] après vous avoir conjuré de recevoir au moins l'effet de ma prompte obéissance pour une preuve certaine et plus que démonstrative de la passion avec laquelle je suis, Monsieur, votre très humble et très obéissant serviteur,

Fermat.

A Toulouse, le 1 de l'an 1662.

P. S. Si vous persistez toujours à n'accorder pas un mouvement successif à la lumière, et à soutenir qu'il se fait en un instant, vous n'avez qu'à comparer ou la facilité ou la fuite et résistance plus ou moins grande, à mesure que les milieux changent. Car cette facilité ou cette résistance étant plus ou moins grande en différents milieux, et ce en une proportion diverse à mesure que les milieux diffèrent davantage, elles pourront être considérées en une raison certaine et par conséquent tomber dans le calcul aussi bien que le temps du mouvement, et ma démonstration y servira toujours d'une même manière.

Je n'ai pas étendu mon opération tout entière : et il n'a pas été nécessaire, puisque ma méthode est imprimée tout au long dans le sixième tome du *Cours mathématique* d'Hérigone et que j'en ai assez dit pour être entendu. Si vous m'ordonnez de parcourir tous les détours de l'analyse en forme, je le ferai et je n'aurai pas même beaucoup de peine à faire la démonstration par la composition, c'est-à-dire en parlant le langage d'Euclide.

CXIII.

CLERSELIER A FERMAT.

SAMEDI 6 MAI 1662.

(D., III, 52.)

MONSIEUR,

Ne croyez pas que ce soit à dessein de troubler la paix que vous présentez à tous les Descartistes, que je prends aujourd'hui la plume à la main. Les conditions sous lesquelles vous la leur offrez leur sont trop avantageuses, et à moi en particulier trop honorables, pour ne la pas accepter; et si tous ceux qui ont jamais eu des démêlés avec leur maître étoient aussi sincères que vous, vous la verriez bientôt établie partout au contentement de tous les partis.

Il y avoit encore deux sortes d'esprits à satisfaire au sujet de la réfraction :

Les uns, peu versés dans les Mathématiques, qui ne pouvoient comprendre une raison prise de la nature des mouvemens composés, et vous leur avez fait entendre raison, en leur proposant un autre principe plus plausible en apparence et plus proportionné à leur portée, à savoir que la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples;

Les autres qui y étoient trop adonnés et qui ne pouvoient se rendre aux raisons pures et simples de la métaphysique, qu'il faut pourtant nécessairement joindre avec celles-là pour leur donner la force de la conviction, et vous leur avez ôté cet obstacle en conduisant votre principe par un raisonnement purement géométrique.

Et comme ces deux sortes de personnes étoient sans doute beaucoup plus en nombre que les autres, vous méritez aussi sans difficulté une plus grande part dans la gloire qui est due à une si belle et si importante découverte.

Je ne vous l'envie point, Monsieur, et vous promets de le publier

partout et de confesser hautement que je n'ai rien vu de plus ingénieux ni de mieux trouvé que la démonstration que vous avez apportée. Permettez-moi seulement de vous dire ici les raisons qu'un Descartiste un peu zélé pourroit alléguer pour maintenir l'honneur et le droit de son maître, et pour ne pas relâcher si tôt à un autre la possession où il est, ni lui céder le premier pas.

1. Le principe que vous prenez pour fondement de votre démonstration, à savoir que la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples, n'est qu'un principe moral et non point physique, qui n'est point et qui ne peut être la cause d'aucun effet de la nature.

Il ne l'est point, car ce n'est point ce principe qui la fait agir, mais bien la force secrète et la vertu qui est dans chaque chose, qui n'est jamais déterminée à un tel ou tel effet par ce principe, mais par la force qui est dans toutes les causes qui concourent ensemble à une même action, et par la disposition qui se trouve actuellement dans tous les corps sur lesquels cette force agit.

Et il ne le peut être, autrement nous supposerions de la connoissance dans la nature : et ici, par la nature, nous entendons seulement cet ordre et cette loi établie dans le monde tel qu'il est, laquelle agit sans prévoyance, sans choix, et par une détermination nécessaire.

2. Ce même principe doit mettre la nature en irrésolution, à ne savoir à quoi se déterminer, quand elle a à faire passer un rayon de lumière d'un corps rare dans un plus dense. Car je vous demande s'il est vrai que la nature doive toujours agir par les voies les plus courtes et les plus simples, puisque la ligne droite est sans doute et plus courte et plus simple que pas une autre, quand un rayon de lumière a à partir d'un point d'un corps rare pour se terminer dans un point d'un corps dense, n'y a-t-il pas lieu de faire hésiter la nature, si vous voulez qu'elle agisse par ce principe à suivre la ligne droite aussitôt que la rompue, puisque si celle-ci se trouve plus courte en temps,

l'autre se trouve plus courte et plus simple en mesure? Qui décidera donc et qui prononcera là-dessus?

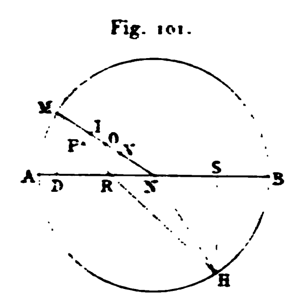
3. Comme le temps n'est point ce qui meut, il ne peut être non plus ce qui détermine le mouvement, et quand une fois un corps est mû et déterminé à aller quelque part, il n'y a nulle apparence de croire que le temps plus ou moins bref puisse obliger ce corps à changer de détermination, lui qui n'agit point et qui n'a nul pouvoir sur lui. Mais comme toute la vitesse et toute la détermination du mouvement de ce corps dépend de sa force et de la disposition de sa force, il est bien plus naturel et c'est, à mon avis, parler plus en physicien de dire, comme fait M. Descartes, que la vitesse et la détermination de ce corps changent par le changement qui arrive en la force et en la disposition de cette force, qui sont les véritables causes de son mouvement, que non pas de dire, comme vous faites, qu'elles changent par un dessein que la nature a d'aller toujours par le chemin qu'elle peut parcourir plus promptement, dessein qu'elle ne peut avoir, puisqu'elle agit sans connoissance, et qui n'a nul effet sur ce corps.

4. Comme il n'y a que la ligne droite qui soit déterminée, il n'y a aussi que cette ligne-là seule où la nature tende dans tous ses mouvemens et, bien que parfois un corps par son mouvement décrive actuellement une autre ligne, néanmoins, à considérer l'un après l'autre tous les points qu'il a parcourus, ils sont plutôt les points d'autant de lignes droites qu'il quitte successivement que ceux d'une ligne courbe qu'il tende à décrire, et il les a plutôt parcourus comme tels qu'autrement, puisque, sitôt que ce corps est laissé et abandonné à la force qui le meut en chaque point, il se porte à suivre la ligne droite à laquelle ce point appartient, et point du tout la ligne courbe qu'il a décrite (*fig.* 101).

Cela étant, s'il est question de porter un rayon de lumière du point M au point H, il est certain que la nature l'envoiera tout droit par la ligne MH, si cela se peut, et de fait, quand le milieu est semblable et égal, elle n'y manque jamais. Mais quand le milieu par où la lumière

passe change de nature et oppose plus ou moins de résistance à son passage et à son cours, qui fera changer sa direction à la rencontre de ce milieu? Que peut-on soupçonner qui en soit la cause?

Fig. 101.



La brièveté du temps? Nullement. Car, quand le rayon MN est parvenu au point N, il lui doit être indifférent, suivant ce principe, d'aller à tous les points de la circonférence BHA, puisqu'il lui faut autant de temps à parvenir aux uns qu'aux autres, et, cette raison de la brièveté du temps ne le pouvant emporter alors vers un endroit plutôt que vers un autre, il y auroit raison qu'il dût plutôt suivre la ligne droite. Car, pour choisir le point H plutôt que tout autre, il faudroit supposer que ce rayon MN, que la nature n'a pu envoyer vers là sans une tendance indéfinie en ligne droite, se souvint qu'il est parti du point M avec ordre d'aller chercher, à la rencontre de cet autre milieu, le chemin qu'il pût parcourir en moins de temps pour de là arriver en H : ce qui, à vrai dire, est imaginaire et nullement fondé en Physique.

Qui fera donc changer la direction du rayon MN (quand il est parvenu au point N) à la rencontre d'un autre milieu? sinon celle qu'allègue M. Descartes, qui est que la même force qui agit et qui meut le rayon MN, trouvant une autre disposition à recevoir son action dans ce milieu que dans l'autre, ce qui change la sienne à son égard, conforme la direction de ce rayon à la disposition qu'elle a pour lors? Et, pource qu'au point de rencontre de cet autre milieu, c'est la seule force qui porte le rayon en bas, qui se ressent de la diversité à recevoir son action, qui est entre le milieu d'où il sort et celui où il entre (celle qui le porte à droite ne s'en ressentant point, à cause que ce milieu ne

lui est aucunement opposé en ce sens-là), le changement qui arrive à la façon dont l'action de la force qui le porte en bas est reçue dans ce point de rencontre, change aussi la direction du rayon et le fait détourner du côté où il est attiré, selon la proportion qui se trouve alors entre l'action de cette force et celle de l'autre. Et cela me semble si clair qu'il ne doit plus rester aucune difficulté.

5. S'il semble apparemment plus raisonnable de croire que la lumière trouve plus aisément passage dans les corps rares que dans les denses, ainsi que vous le supposez, fondé sur l'expérience de tous les corps sensibles qui l'ont sans doute plus libre dans ces sortes de milieux, il est aussi, ce me semble, plus raisonnable de croire que les corps qui entrent dans des milieux qui font plus de résistance à leur passage que ceux d'où ils sortent, comme vous supposez que les corps denses font à la lumière, s'efforcent de s'en éloigner et ne s'y enfoncent que le moins qu'ils peuvent.

Ce que l'expérience confirme : ainsi, quand une balle est poussée de biais de l'air dans l'eau, bien loin de continuer son mouvement en ligne droite, et beaucoup plus de s'enfoncer davantage en approchant de la perpendiculaire, elle s'en éloigne autant qu'elle peut en s'approchant de la superficie. Et vous avez fort bien reconnu la force de cette objection, que vous appelez pourtant légère, mais que vous ne sauriez résoudre que par le principe de M. Descartes, qui ruine entièrement le vôtre.

Car si, par votre principe même, la balle doit s'éloigner de la perpendiculaire, pourquoi la lumière s'en approche-t-elle? Et si la balle ne suit pas votre principe, comme en effet elle ne le suit pas, pourquoi la lumière le suivra-t-elle? Cela ne fait-il pas plutôt voir que, dans l'un et dans l'autre exemple, la nature n'agit pas par votre principe?

6. Cette voie que vous estimez la plus courte parce qu'elle est la plus prompte, n'est qu'une voie d'erreur et d'égarement que la nature ne suit point, et ne peut avoir intention de suivre. Car, comme elle est

déterminée en tout ce qu'elle fait, elle ne tend jamais qu'à conduire ses mouvemens en ligne droite.

Et ainsi, si vous voulez que d'abord elle tende d'M vers H, elle ne peut s'aviser de dresser un rayon vers N, pource que ce rayon de soi n'y tend nullement; mais elle dressera son rayon vers R et, ce rayon étant là une fois parvenu, qui est le plus droit, le plus court et le plus bref de tous ceux qui peuvent tendre à ce point, pour aller maintenant d'R en H, le plus droit encore, le plus court et le plus bref est d'aller tout droit vers H. Et ainsi, si la nature agissoit par votre principe même, elle devroit aller directement d'M vers H; car d'un côté elle est nécessitée à diriger d'abord son rayon vers R, et de là votre principe même la porte vers H.

7. Et, bien que vous ayez très clairement démontré, suivant votre supposition, que le temps des deux rayons MN, NH, pris ensemble, est plus bref que celui de deux autres, quels qu'ils soient, pris aussi ensemble, ce n'est pourtant pas la raison de la brièveté du temps qui porte ces deux rayons par ces deux lignes.

Car seroit-il bien possible qu'un rayon qui est déjà dans l'air, qui a déjà sa direction toute droite et qui ne tend nullement ailleurs, sitôt qu'on lui oppose de l'eau ou du verre, s'avisât de se détourner ainsi qu'il fait, pour le seul dessein d'aller justement chercher un point où son mouvement composé soit le plus bref de tous ceux qui y peuvent aller du lieu de son départ? Cette raison seroit bien métaphysique pour un sujet purement matériel.

Ne doit-on pas plutôt croire, ainsi que j'ai déjà dit, que comme c'est la force du mouvement et sa détermination qui ont conduit ce rayon dans la première ligne qu'il a décrite, sans que le temps y ait rien contribué, c'est le changement qui arrive dans cette force et dans cette détermination qui lui fait prendre la route de l'autre qu'il a à décrire, sans que le temps y contribue, puisque le temps ne produit rien?

8. Enfin la différence que je trouve entre M. Descartes et vous est

que vous ne prouvez point, mais que vous supposez pour principe, que la lumière passe plus aisément dans les corps rares que dans les denses; au lieu que M. Descartes prouve, et ne suppose pas simplement, ainsi que vous dites, que la lumière passe plus aisément dans les corps denses que dans les rares.

Car, posé votre principe et posé encore que la nature agisse toujours par les voies les plus courtes ou les plus promptes, vous concluez fort bien que la lumière doit suivre le chemin qu'elle tient dans la réfraction; là où M. Descartes, sans rien supposer, se sert seulement de l'expérience même pour conclure que la lumière passe plus aisément dans les corps denses que dans les rares, et donne en même temps le moyen de mesurer la proportion avec laquelle cela se fait. Et, pource qu'il jugeoit bien que l'expérience journalière que nous avons du contraire pourroit nous donner lieu de nous en étonner, il en rend la raison physique dans la vingt-troisième page de sa Dioptrique, à laquelle on peut avoir recours.

Mais, s'il est vrai que la lumière passe plus difficilement dans les corps rares que dans les denses, comme la raison alléguée en ce lieu-là par M. Descartes semble le prouver, et s'il est vrai aussi que la nature n'agisse pas toujours par les voies les plus promptes, comme l'exemple de la balle qui passe de l'air dans l'eau le justifie, adieu toute votre démonstration.

Et même, comme vous dites avoir autrefois proposé vos difficultés à M. Descartes, à lui, dites-vous, *viventi atque sentienti* (1), sans que ni lui ni ses amis vous aient jamais satisfait, ne pourroit-on pas aussi dire qu'il vous a fait réponse de son vivant, et ses amis depuis sa mort? *tibi, inquam, viventi, et nisi dicere nefas esset, adderem : et non intelligenti,* puisqu'il y en a qui se persuadent de la bien entendre.

Et enfin, comme vous dites que la nature semble avoir eu cette déférence et cette complaisance pour M. Descartes de s'être rendue à lui et lui avoir découvert ses vérités sans s'y laisser forcer par la

(1) *Voir* ci-dessus, pages 355-356.

démonstration, ne peut-on pas dire que vous avez forcé la Géométrie, toute sévère qu'elle est, à vous en fournir une par le moyen de cette double fausse position?

Après quoi je laisse aux plus sévères et plus clairvoyans naturalistes à juger qui de vous deux a le mieux rencontré dans la cause qu'il a assignée à la réfraction. Cela n'empêche pas qu'à considérer les choses d'une autre façon, je ne sois d'accord avec vous que la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus promptes. Car, comme elle n'agit que par la force qui l'emporte nécessairement et qu'elle est toujours déterminée dans son action, elle fait toujours tout ce qu'elle peut faire; et ainsi, quelque route qu'elle prenne, c'est toujours la plus courte et la plus prompte qui se pouvoit, eu égard à toutes les causes qui l'ont fait agir et qui l'ont déterminée.

Après vous avoir ainsi proposé ce qui me fait persister dans mes premiers sentimens, je ne laisse pas de me sentir obligé de me rendre et d'acquiescer en quelque façon aux vôtres; et, bien loin de vous disputer la gloire d'entrer dans la société de la preuve d'une vérité si importante, je pense avoir trouvé un moyen qui vous doit mettre tous deux d'accord, en laissant à chacun la part qui lui appartient.

Il semble que, comme la lumière est la plus noble production de la nature, elle la laisse aussi agir d'une manière la plus régulière et la plus universelle, et qu'elle a fait que dans son action tout ce qu'elle emploie de principes dans toutes les autres causes se rencontrent tous ensemble dans celle-ci.

Ainsi, pource que les mouvemens des autres corps dépendent de la force qui les meut et de la détermination de cette force, la lumière, suivant ces lois, tantôt se continue en ligne droite et tantôt s'en écarte, en s'approchant ou s'éloignant de la perpendiculaire. Mais pource que nous voyons aussi que la nature agit toujours par les voies les plus courtes, il falloit que la lumière s'accommodât à cette loi.

M. Descartes a fait voir que la lumière suit dans la réfraction les lois ordinaires du mouvement de tous les corps, et vous, Monsieur, avez fait voir que, quoique la lumière semble dans la réfraction prendre un

détour et s'oublier qu'elle doit agir par les voies les plus courtes, elle observe néanmoins cette loi avec une exactitude si grande qu'on n'y sauroit rien désirer.

Et ainsi l'on peut dire que vous avez travaillé conjointement avec M. Descartes à justifier en cela la nature et à rendre raison de son procédé : lui, par des raisons naturelles et communes à tous les corps; et vous, Monsieur, par des raisons mathématiques tirées de la plus pure et plus fine Géométrie.

Et même, comme cette preuve géométrique étoit la plus difficile à trouver et à démêler, je veux bien que vous l'emportiez par dessus lui, et dès à présent je signe et souscris à une éternelle paix avec vous, et ne veux plus désormais contester sur l'inefficacité de votre principe et sur la différence qui est entre le vôtre et le sien, puisqu'il conclut une même chose et nous enseigne une même vérité.

Je suis, etc.

CXIV.

CLERSELIER A FERMAT.

SAMEDI 13 MAI 1662.

(D., III, 53.)

Monsieur,

1. C'est par l'ordre de l'Assemblée qui se tient toutes les semaines chez M. de Montmort, que je vous écris aujourd'hui pour vous faire une amende honorable d'un méchant mot latin que j'ai mis dans la lettre que je me donnai l'honneur de vous écrire il y a huit jours, dont je lui fis la lecture mardi dernier. Ce fut la seule chose qu'elle y trouva à redire, et je l'avois bien senti moi-même en l'écrivant : aussi avois-je tâché de l'adoucir par le correctif qui le précède. Cependant, nonobstant cela, j'en reçus une réprimande publique, et aussitôt je me proposai de vous en faire mes excuses au premier ordinaire, ce que je fais

aujourd'hui d'autant plus volontiers qu'outre que par cette soumission je vous ferai connoitre l'ingénuité de mon procédé, cela me donnera aussi occasion de vous dire quelque chose que je fus obligé de répliquer à quelques objections qui me furent faites par quelques-uns de l'Assemblée, afin de rendre la pensée de M. Descartes, touchant la réfraction, plus claire par un exemple familier et qui est tout-à-fait propre au sujet.

Si je n'avois point été si impatient que de vous envoyer une chose qui étoit prête il y avoit plus de quinze jours et que l'engagement que j'avois m'avoit obligé de faire voir dès-lors à M. de la Chambre, j'aurois évité le reproche de la Compagnie et ne serois pas tombé dans cette faute. Mais j'eus peur qu'il me fallût encore différer plus longtemps d'en parler à l'Assemblée, qui avoit déjà remis par deux fois la lecture que je lui en voulois faire, pource qu'elle vouloit aussi avoir en même temps les sentimens de M. Petit, qui lui avoit fait connoitre, dès la première fois que votre lettre parut devant elle, qu'il avoit plusieurs choses à dire et contre ce que vous écrivez à M. de la Chambre et contre ce que M. Descartes a écrit.

Pour moi, qui ne m'étois pas trouvé à l'Assemblée quand votre lettre y fut lue la première fois, et qui me dispensois alors souvent de m'y trouver, à cause de quelques affaires plus importantes que la détention de M. de la Haye, mon gendre, me donnoit pour poursuivre à la cour sa liberté, je ne l'eus pas plus tôt vue que je crus être obligé d'y faire réponse, comme étant une suite des petits démêlés que nous avions déjà eus autrefois ensemble sur la même matière, et parce aussi que vous me faites l'honneur de me nommer par trois fois dans votre lettre et de sembler m'y convier.

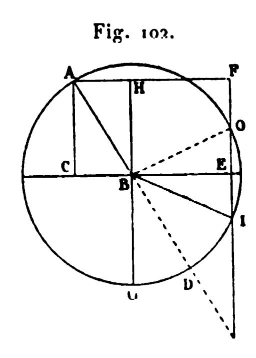
J'avois donc préparé ma réponse le plus tôt que j'avois pu, et pensois la faire voir à la Compagnie, mais elle ne le jugea pas à propos, pour ne point prévenir M. Petit dans la repartie qu'il avoit promis de vous faire. Mais, craignant que cela n'allât trop en longueur, je me résolus de moi-même samedi dernier de vous l'envoyer avant que de l'avoir fait voir à la Compagnie, de qui j'ai reçu les avis trop tard pour

m'empêcher de tomber dans cette faute, mais non pas pour vous en faire mes excuses et vous en demander le pardon.

Et pour le mériter en quelque façon, souffrez que je m'explique un peu plus au long que je ne fis la dernière fois, pour vous faire comprendre ce que je pense de la pensée qu'a eue M. Descartes touchant la réfraction.

2. Il est certain qu'à considérer tout seul le rayon AB, en tant qu'il est dans l'air, il ne va ni à gauche ni à droite, ni en haut ni en bas, mais toute sa tendance est d'aller vers D et n'a qu'une seule direction. Mais sitôt qu'on lui oppose un autre milieu, par exemple CBE, dans lequel il soit obligé de passer, on peut dire et il est vrai qu'à l'égard de ce milieu il a diverses tendances. Car si on le lui oppose directement, sa chute est perpendiculaire et n'a qu'une direction à son égard : mais si on le lui oppose de biais, comme il est dans la page 17 de la Dioptrique (*fig.* 102), alors ce rayon à son égard a une double direction :

Fig. 102.



l'une qui le fait tendre vers lui, qui est de haut en bas; et l'autre qui le porte de gauche à droite, à laquelle ce milieu n'est point du tout opposé.

Et si on le lui opposoit d'une autre façon, la même direction, qui maintenant est de gauche à droite, pourroit être celle qui le porteroit vers lui, et l'autre, celle à laquelle ce milieu ne seroit point opposé. Et selon que ce milieu est plus ou moins incliné à ce rayon, les deux tendances ou directions qu'il a à son égard sont diverses et peuvent avoir l'une à l'égard de l'autre diverses proportions.

3. Mais quand je parle de tendance, de direction ou de détermination, ne vous allez pas imaginer que j'entends parler d'une direction sans force et sans mouvement, ce qui seroit chimérique et impossible, ne pouvant y avoir de direction sans mouvement ou sans effort; mais j'entends par ce mot de direction ou de détermination vers quelque endroit toute la partie du mouvement qui est déterminée à aller vers cet endroit-là.

Donc, selon que le milieu est plus ou moins incliné au rayon, la force qui à son égard le porte vers un certain endroit peut être plus ou moins grande que celle qui le porte vers l'autre. Par exemple, si l'angle ABC est égal à l'angle ABH, les deux parties du mouvement, dont l'une le porte en bas et l'autre à droite, sont égales; s'il est moindre, sa force est moindre; et s'il est plus grand, elle est plus grande.

4. Mais, quelle que soit l'inclination du rayon sur le milieu, il y a toujours une partie de la force de son mouvement à laquelle ce milieu est opposé et une autre à laquelle il ne l'est point. Or, tandis que le rayon est dans l'air, la proportion, quelle qu'elle soit, qui est entre ces deux parties du mouvement que nous supposons uniforme, le porte dans la ligne AB et, tandis que rien ne la change ou tandis qu'elles changent en gardant toujours entre elles une même proportion, le rayon va toujours en ligne droite.

Mais lorsque le rayon AB de la page 17 étant parvenu au point B rencontre un autre milieu, si ce milieu ne présente pas au rayon la même facilité à se laisser pénétrer qu'avoit l'air, il doit arriver du changement au cours du rayon, à cause que ce milieu n'est opposé qu'à la détermination ou à la partie du mouvement qui le porte vers lui, et non point à l'autre, et s'il présente moins de facilité au passage du rayon que ne fait l'air, la résistance qu'il apporte à la partie du mouvement qui tend vers lui, et non point à l'autre, laquelle en ce point de rencontre demeure précisément la même, fait que, n'y ayant plus la même proportion entre ces deux parties du mouvement qui toutes deux en-

semble portoient auparavant le rayon dans la ligne AB, elles doivent lui faire changer de détermination et le porter vers le point où tend la direction qui s'ajuste avec la proportion qui se trouve alors entre elles, et ainsi le faire éloigner de la perpendiculaire.

Que si, au contraire, le milieu qu'on oppose au rayon AB présente plus de facilité à son passage que ne faisoit l'air, cette nouvelle facilité qu'il apporte et qui n'est ressentie que par la partie du mouvement qui tend vers lui, et non point par l'autre, comme j'ai déjà dit, doit changer sa direction, à cause que cela change la proportion qui est entre les deux parties dont le mouvement entier de la balle est composé, et le détourner par conséquent vers la perpendiculaire, ce qui arrive quand un rayon de lumière passe de l'air dans de l'eau ou dans du verre.

5. Et pour faciliter la compréhension de tout ceci par un exemple aisé, représentez-vous un corps sphérique bien dur et bien poli, mis sur une planche très dure aussi et très polie dont le bout s'appuie sur l'extrémité d'une table, en sorte que la planche soit inclinée sur la table et fasse un angle aigu avec elle. Il est certain que ce mobile roulera sur cette planche, et ce d'autant plus ou moins vite que la planche sera moins ou plus inclinée sur cette table. Mais, quel que soit le mouvement du mobile sur cette planche, il est certain qu'à l'égard de la table il a deux déterminations : l'une qui le porte vers elle, par laquelle il descend; et l'autre qui le porte vers l'une des murailles de la chambre, par laquelle il avance de ce côté-là.

Et il est si vrai qu'il a ces deux impressions, qu'il les garde encore toutes deux lorsqu'il est en l'air hors de la planche; et s'il ne lui en restoit qu'une quand il est hors de dessus la planche, il ne suivroit que celle-là seule; par exemple, il tomberoit perpendiculairement à terre sitôt qu'il a quitté la planche, s'il ne lui restoit que celle de sa chute.

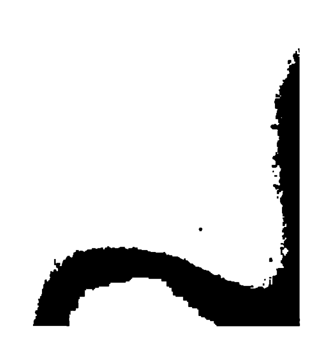
Mais considérez ce qui arrive au mobile quand il est au point où il quitte la planche, et vous verrez qu'il arrive la même chose à la lumière quand elle passe de l'air dans l'eau. Et parce qu'alors la partie

du mouvement qui porte le mobile en bas trouve plus de facilité ou moins de résistance à son action, quand il est hors de dessus la planche et dans l'air, qu'elle n'avoit quand il étoit sur la planche; et que celle qui le porte vers la muraille demeure la même (bien que ce soit encore la même force totale qui pousse en ce point-là le mobile, et que la force des deux parties de son mouvement prises séparément soit la même), néanmoins, pource que la proportion qui étoit auparavant entre la facilité ou la résistance que présentoit le milieu à ces deux forces est changée, et que dans ce point de sortie il trouve plus de facilité pour descendre qu'auparavant, sans qu'il en trouve ni plus ni moins pour aller vers la muraille, pour cela il arrive qu'il ne suit plus la direction de la ligne qu'il avoit parcourue sur la planche, mais qu'il en prend une autre, laquelle est proportionnée au plus de facilité qui se trouve alors en l'une de ses forces plus qu'en l'autre. Ce qui fait que le mobile, en quittant la planche, s'approche de la perpendiculaire, comme fait aussi la lumière en entrant dans l'eau, pour la même raison.

Et c'est à mon sens une des choses des plus aisées à concevoir qu'il est possible, et c'est aussi à mon avis tout ce qu'a voulu dire M. Descartes au sujet de la réfraction. Je ne prétends pas néanmoins pour cela vous avoir persuadé : il suffit que je me sois donné à entendre, afin que vous ne croyiez pas que je suive aveuglément M. Descartes ou que je vous contredise de gaieté de cœur. Je vous ressemble en ce point que je n'aime et ne cherche que la vérité, et cette conformité que j'ai avec vous me fait espérer que vous ne me désavouerez pas, quand je m'avouerai partout, etc.

P. S. Pour éclaircir davantage cette matière, j'apporterai encore ici un exemple qui résout à mon avis la plupart des difficultés que l'on peut faire sur ce qu'a dit M. Descartes touchant la réfraction dans sa Dioptrique.

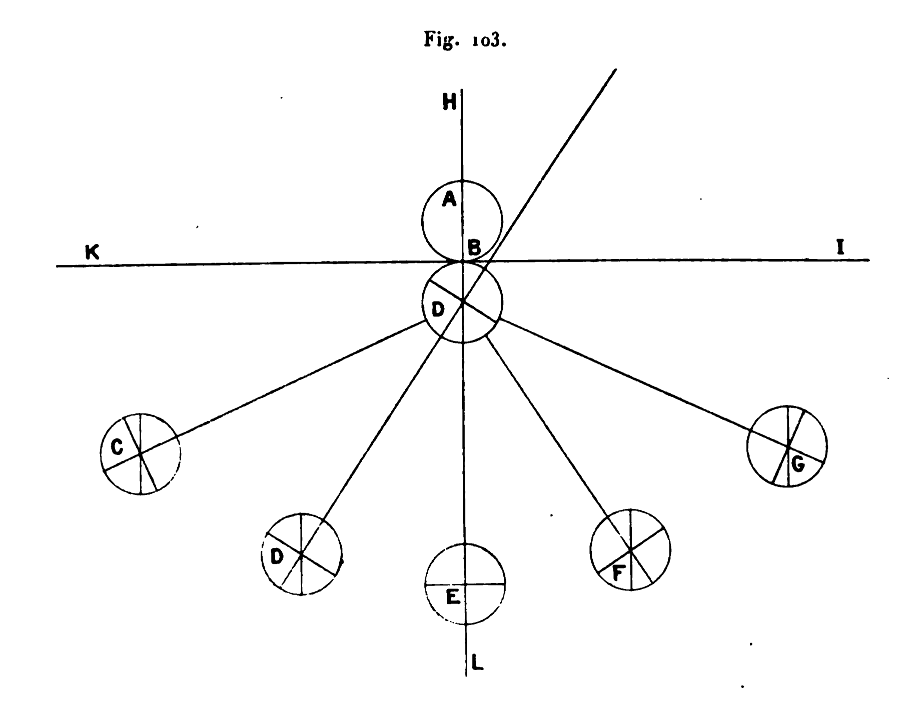
Il est constant par l'expérience que, de quelque façon que la boule A soit poussée au point B par les boules C, D, E, F, G, et quelles que



soient les différentes déterminations dont on peut supposer que celle de leur route soit composée, elles la pousseront toujours vers H (*fig.* 103).

Premièrement, pour la boule E, il est clair qu'elle la doit pousser vers H, puisque la boule A s'oppose totalement à sa détermination; mais ce qui est clair pour la boule E doit pareillement être entendu des autres, qui, bien qu'elles viennent de biais vers la boule A, ne la

Fig. 103.



touchent au point B et ne la poussent qu'en tant qu'elles descendent vers H, et non point en tant qu'elles vont vers I (ou vers K). C'est pourquoi elles ne sauroient imprimer d'autre mouvement à cette boule, sinon de la faire aller vers H. Or, quoique les déterminations des boules D et F soient opposées, en tant que l'une va à droite et l'autre à gauche, elles ne le sont point en tant qu'elles descendent et ainsi elles doivent produire sur la boule A un même effet, qui est de la pousser vers H.

Mais, si nous supposons que la boule A soit dure et immobile, toutes

ces boules, après l'avoir rencontrée, seront contraintes de changer la détermination qu'elles avoient d'aller vers H en celle d'aller ou de réfléchir vers L, et de garder les autres si elles en avoient, auxquelles elle ne peut apporter de changement, à cause qu'elle ne leur est point opposée en ce sens-là : et ceci explique la réflexion à angles égaux.

Que si nous supposons que ces boules aient communiqué de leur mouvement à la boule A, ce ne peut être qu'au sens qu'elle leur est opposée, et partant ce ne peut être que le mouvement vers H qui puisse recevoir de l'altération, et non point celui vers I (ou vers K), lequel par conséquent doit demeurer le même et en son entier. Si bien que ces boules perdant au point B de la force qui les détermine à aller vers H et ne perdant rien de celle qui les détermine à aller vers I, elles sont contraintes de se détourner et de prendre en ce moment une autre direction, laquelle elles gardent toujours, quelque résistance que le milieu apporte après cela, qui peut bien les faire aller moins vite, mais non pas changer leur direction, à cause qu'il peut bien être opposé à leur vitesse, mais non point à la direction qu'elles ont prise, puisque nous supposons qu'il est également facile ou difficile à s'ouvrir ou pénétrer de tous côtés. Et cela explique la réfraction qui s'éloigne de la perpendiculaire.

Que si au contraire nous supposons que, ces boules étant au point B, la boule A leur cède plus aisément et les entraine, pour ainsi dire, vers H, cela fait que ces boules descendent plus vite, mais cela ne change rien à leur mouvement vers la droite (ou vers la gauche) auquel elle n'est point opposée. Et ainsi ces boules, au moment qu'elles sont au point B, étant plus disposées à aller vers H qu'elles n'étoient auparavant, et n'étant ni plus ni moins disposées qu'elles étoient à aller vers I, elles doivent changer de direction et la garder après l'avoir prise. Et cela explique la réfraction vers la perpendiculaire.

Et pour faire voir que la résistance plus ou moins grande du corps du milieu n'y fait rien et ne change point la détermination que la boule prend au point B, considérons ce qui peut arriver à la boule A selon les différens cas qu'on peut s'imaginer. Par exemple, si la boule E tombe

perpendiculairement sur A et qu'elle lui communique la moitié de son mouvement, où ira-t-elle? Sans doute qu'elle ira vers H, et la force qu'elle reçoit en ce moment ne la peut déterminer à aller que vers là : mais est-ce à dire qu'en allant vers H elle décrira en deux momens une ligne aussi longue qu'a fait E en un moment? Oui sans doute, si vous supposez que le milieu qu'elle parcourt lui donne passage aussi facilement qu'avoit fait l'autre; mais si ce milieu lui résiste davantage, elle en décrira une plus courte, comme aussi elle en peut décrire une égale ou même une plus longue, si ce milieu résiste autant ou moins à la force qu'elle a reçue.

Que si nous supposons que c'est l'une des autres boules C, D, F, G, qui rencontre A au point B, il s'ensuivra la même chose, à savoir qu'elle sera contrainte, par la force qu'elle recevra, de prendre sa détermination vers H comme auparavant, au moment même qu'elle en est touchée. Et la qualité du milieu ne changera point cette détermination, sinon qu'ayant reçu moins de force, parce que n'étant touchée que de biais elle n'est pas poussée par toute la force de la boule qui la touche, elle ira moins vite.

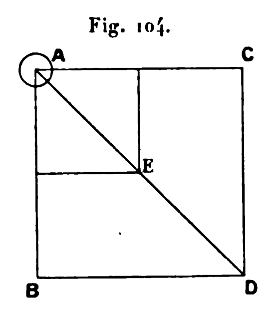
Que si nous supposons que la boule A étoit déjà en mouvement et se mouvoit vers I, la chute de l'une de ces boules sur elle n'apporte aucun changement à la détermination qu'elle avoit à aller vers là, c'est-à-dire à toute la force de son mouvement qui la déterminoit à aller vers I, et partant elle doit continuer d'y aller comme elle faisoit auparavant. Mais elle doit aussi aller en même temps vers le côté où la détermine l'impression qu'elle a nouvellement reçue par la chute de l'une de ces boules, si bien que dès ce moment elle doit prendre sa direction.

Mais si nous supposons que le milieu où elle se trouve après cela lui résiste davantage que ne faisoit l'autre, cela ne change point la détermination qu'elle a prise, mais fait seulement qu'elle le parcourt moins vite qu'elle n'auroit fait. Car enfin la proportion qui étoit en ce moment entre ses deux forces l'a déterminée à aller quelque part, et quelque facilité ou difficulté qu'apporte ensuite le corps du milieu qu'elle doit

parcourir, comme elle est égale en tout sens, cela ne peut rien changer à la détermination qu'elle a prise en sa superficie, et ne la doit ni plus ni moins détourner.

Et la même proportion est ici gardée qu'entre de forts ou de foibles mouvemens également proportionnés. Par exemple, que la boule A soit poussée par deux forces égales vers B et vers C en même temps, que doit-il arriver si elle est dans l'air? Il arrivera que ces deux forces, ayant un grand effet sur elle, la pousseront en un moment jusques en D. Mais si elle étoit dans l'eau, alors ces deux forces, n'ayant pas un si grand effet sur elle, ne la pousseront que jusques en E, mais elle ne changera point pour cela de direction.

Fig. 104.



Et ce que je dis de la boule A, qui est poussée par des forces égales dans deux milieux différens, se doit entendre tout de même de toute autre sorte de proportion qui soit entre ces deux forces : savoir est que la diversité du milieu ne change point la direction à laquelle les forces qu'elle a la déterminent au premier moment, mais peut seulement changer sa vitesse.

Par exemple, que la boule A soit poussée en même temps par deux forces dont l'une la pousse du double plus fort vers C que l'autre ne fait vers B, que doit-il arriver si elle est dans l'air? Il arrivera que ces forces, ayant un grand effet sur elle, la pousseront en un moment jusques en D. Mais si elle étoit dans l'eau, alors ces deux forces n'ayant pas un si grand effet sur elle, mais ne laissant pas de l'avoir de tous côtés proportionné à leur force, parce que l'eau s'ouvre également de tous côtés, ne la pousseront que jusques en E; mais elle ne chan-

gera point pour cela de direction, laquelle elle prend dès le premier moment.

Et ainsi, ayant égard aux premières suppositions que fait M. Descartes, lorsqu'il se sert de l'exemple d'une balle pour expliquer la réflexion et la réfraction dans le chapitre second de sa Dioptrique, c'est-à-dire supposant que ni la pesanteur ou la légèreté de la balle, ni sa grosseur, ni sa figure, ni aucune telle cause étrangère ne change son cours, ce qu'il dit ensuite est véritable : c'est à savoir qu'il ne faut considérer que la détermination que prend la balle au moment qu'elle est au point B, sans se mettre en peine de ce qui peut arriver de changement en sa vitesse dans le milieu qu'elle parcourt par après, pource que c'est seulement au point B qu'elle est contrainte de changer de direction, à cause du changement qui arrive en ce point dans la proportion qui est entre les deux forces qui composent tout son mouvement; et la direction qu'elle a une fois prise au point B, elle la garde par après et la suit plus ou moins vite selon le plus ou moins de résistance du milieu.

CXV.

FERMAT A CLERSELIER.

DIMANCHE 21 MAI 1662 [1].

(D. III, 54.)

Monsieur,

Vos deux lettres des sixième et treizième de mai [2] m'ont été rendues en même temps. Elles me font plus d'honneur que je n'en devois raisonnablement attendre, et, bien loin que vos mots latins m'aient choqué, je suis persuadé que, dans la supposition de votre sentiment

(1) L'édition Clerselier donne la date du 12 mai probablement fautive par suite d'une interversion à l'impression.

(2) Lettres CXIII et CXIV.

sur le sujet de la démonstration de M. Descartes, il n'y en a point de plus véritables en aucun endroit de vos lettres.

Car si cette démonstration est dans les règles des démonstrations certaines et infaillibles, il n'est rien de plus vrai sinon que ceux qui n'en sont pas convaincus ne l'entendent point. La qualité essentielle d'une démonstration est de forcer à croire, de sorte que ceux qui ne sentent pas cette force, ne sentent pas la démonstration même, c'est à dire qu'ils ne l'entendent pas.

Je n'attribue donc, Monsieur, qu'à un excès de courtoisie et de civilité cet adoucissement que Messieurs de votre Assemblée vous ont inspiré, et je vous en rends très humbles grâces.

Pour la question principale, il me semble que j'ai dit souvent et à M. de la Chambre et à vous que je ne prétends ni n'ai jamais prétendu être de la confidence secrète de la Nature. Elle a des voies obscures et cachées que je n'ai jamais entrepris de pénétrer; je lui avois seulement offert un petit secours de géométrie au sujet de la réfraction, si elle en eût eu besoin. Mais puisque vous m'assurez, Monsieur, qu'elle peut faire ses affaires sans cela et qu'elle se contente de la marche que M. Descartes lui a prescrite, je vous abandonne de bon cœur ma prétendue conquête de physique, et il me suffit que vous me laissiez en possession de mon problème de géométrie tout pur et *in abstracto*, par le moyen duquel on peut trouver la route d'un mobile qui passe par deux milieux différents et qui cherche d'achever son mouvement le plus tôt qu'il pourra.

Et je ne sais pas même si la merveille ne sera point plus grande, en supposant que j'ai mal deviné le raisonnement de la Nature; car peut-on s'imaginer rien de plus surprenant que ce qui m'est arrivé? J'écrivis, il y a plus de dix ans (1), à M. de la Chambre que je croyois que la réfraction se devoit réduire à ce problème de géométrie, et j'étois pour lors tout-à-fait persuadé que l'analyse de ce problème me donneroit une proportion différente de celle de M. Descartes. Et néanmoins,

(1) Faut-il lire « six ans »? La lettre LXXXVI n'est pas antérieure à 1657.

en tentant le problème, qui est assez difficile, dix ans après, j'ai trouvé justement la même proportion que M. Descartes.

Si j'ai dit un mensonge, n'ai-je pas quelque raison de prétendre que c'est un de ces mensonges fameux desquels il est dit dans le Tasse, comme je vous ai déjà écrit ([1]) :

Quando sarà il vero
Si bello, che si possa a ti preporre?

En voilà de reste, je croise les armes. Permettez-moi seulement, s'il vous plaît, d'assurer ici M. Chanut et M. l'abbé d'Issoire, son fils, de mon obéissance très humble : je n'ai pas l'honneur d'être connu du père, mais pourquoi serois-je le seul de toute l'Europe qui n'aurois pas une entière vénération pour lui?

Je suis, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur,

FERMAT.

([1]) *Voir* ci-dessus, page 367.

ANNÉE 1664.

CXVI.

FERMAT A M. DE ****.

1664.

(*Va*, p. 156.)

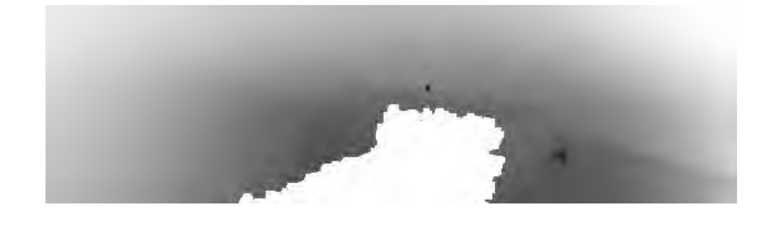
Monsieur,

Puisque M. de..... parle et que vous l'ordonnez, vous, Monsieur, de qui la réputation est si grande et si bien établie, je laisse éveiller ma Géométrie, qui dormoit depuis longtemps dans un profond repos et, pour entrer d'abord en matière, je veux bien vous conter l'intrigue de notre Dioptrique et de nos réfractions, en forme d'histoire, afin de vous laisser le jugement libre et que vous puissiez prononcer sans préoccupation.

Dès que j'eus vu le Livre de feu M. Descartes et que j'eus examiné avec quelque attention la proposition qui sert de fondement à sa Dioptrique et qui établit la proportion des réfractions, je soupçonnai sa preuve; sa démonstration me sembla un véritable paralogisme :

Premièrement, parce qu'il la fonde sur une comparaison et que vous savez que la Géométrie ne se pique guère de ces figures, les comparaisons y étant encore plus odieuses que dans le commerce du monde;

Secondement, parce qu'il suppose que le mouvement de la lumière, qui se fait dans l'air et dans les corps rares, est plus malaisé ou, si vous l'aimez mieux ainsi, plus lent que celui qui se fait dans l'eau et les autres corps denses; ce qui semble choquer le sens commun;



Et enfin, parce qu'il prétend que l'une des directions ou des déterminations du mouvement d'une balle subsiste tout entière après la rencontre du second milieu.

J'ajoutois même quelques autres raisons, qu'il seroit ou superflu ou ennuyeux de vous déduire. Il vit mes écrits, il y répondit et, après plusieurs réponses et répliques de part et d'autre, nous nous séparâmes comme le prévenu et le témoin, l'un dans l'affirmative, l'autre dans la négative, quoique j'eus enfin des lettres de sa part pleines de civilité.

Depuis sa mort, M. de la Chambre, ayant publié son Traité de la lumière et m'ayant fait l'honneur de me l'envoyer, je pris occasion de lui écrire la lettre que vous avez vue [1], dans laquelle je lui témoignai que, pour nous garantir des paralogismes en une matière si obscure, je ne voyois point de moyen plus assuré que de chercher les réfractions dans cet unique principe, que la nature agit toujours par les voies les plus courtes, sur le fondement duquel je lui indiquai qu'on pouvoit chercher par géométrie le point de réfraction, en le réduisant au problème ou théorème que vous savez. Mais, parce que j'en jugeai l'invention très difficile et très embarrassée, puisque ces questions *de maximis et minimis* conduisent d'ordinaire à des opérations de longue haleine et qui se brouillent aisément par une infinité d'asymmétries qu'on trouve sur son chemin, je laissai là ma pensée pendant plusieurs années, en attendant que quelque géomètre moins paresseux que moi en fît ou la découverte ou la démonstration.

Personne ne voulut entreprendre ce travail; cependant je recevois des lettres de M. de la Chambre de temps en temps, par lesquelles il me pressoit d'ajouter la géométrie à mon principe et de faire la démonstration en forme du véritable fondement des réfractions. Ce qui me rebutoit à l'avance étoit l'assurance que M. Petit et autres m'avoient donnée, que leurs expériences, qu'ils avoient souvent réitérées pour mesurer les réfractions et dans l'eau et dans le cristal et dans le verre

[1] La lettre LXXXVI.

et dans beaucoup d'autres liqueurs différentes, s'accordoient très précisément avec la proportion de M. Descartes; de sorte qu'il me sembloit inutile d'en aller chercher quelque autre par mon principe, puisque la nature elle-même s'expliquoit si clairement en sa faveur.

L'objection que vous me faites dans votre Écrit ne me faisoit nulle peine et j'y avois déjà répondu dans ma lettre à M. de la Chambre par cette raison, que tout ce qui appuie ou fait ferme sur quelque point d'une ligne courbe est censé faire ferme ou appuyer sur la ligne droite qui touche la courbe audit point; et ainsi, quoique la somme des deux lignes de réflexion soit quelquefois la plus grande dans les miroirs concaves, sphériques ou autres, elle est toujours la plus petite de toutes celles qui peuvent tomber sur la ligne ou sur le plan qui touchent les miroirs au point de la réflexion, et cela n'a pas besoin de plus grande preuve, M. Descartes le supposant ainsi aussi bien que moi.

Toute la difficulté se réduisoit donc à ce qu'il me paroissoit que j'avois à combattre, non seulement les hommes, mais encore la nature. Néanmoins les dernières instances de M. de la Chambre furent si pressantes que je résolus, il y peut avoir environ deux ou trois ans, de tenter le secours de mon analyse, m'imaginant qu'il y a une infinité de proportions différentes entre elles dont les sens ne sauroient vérifier la diversité, et qu'ainsi j'en trouverois peut-être quelqu'une qui approcheroit de celle de M. Descartes et qui pourtant ne seroit pas la même.

Je fis mon analyse en forme par une méthode qui m'est particulière et qu'Hérigone a fait autrefois imprimer dans son *Cours mathématique*. Je surmontai toutes les asymmétries avec peine, et voilà que tout à coup, à la fin de mon opération, tout se débrouille et il me vient une équation très simple qui me donne justement la même proportion de M. Descartes.

Je crus sur l'heure avoir équivoqué, car je ne pouvois me figurer qu'on aboutit à une même conclusion par des routes tout-à-fait opposées, M. Descartes supposant, pour un des moyens de sa démonstra-

tion, que le mouvement de la lumière trouve plus de résistance dans l'air que dans l'eau, et moi supposant tout le contraire, comme vous verrez dans la copie de ma démonstration, que j'ai tâché de refaire de mémoire pour vous satisfaire pleinement, mon original ayant été envoyé à M. de la Chambre, suivant ma paresse ordinaire.

Je refis donc pour lors la question à diverses reprises, en changeant les positions, et je trouvai toujours la même conclusion, ce qui me confirma deux choses : l'une, que l'opinion de M. Descartes sur la proportion des réfractions est très véritable; et l'autre, que sa démonstration est très fautive et pleine de paralogismes.

Messieurs les Cartésiens virent ensuite ma démonstration, qui leur fut communiquée par M. de la Chambre; ils s'opiniâtrèrent d'abord à la rejeter et, quoique je leur représentasse tout doucement : qu'il leur devoit suffire que le champ de bataille demeurât à M. Descartes, puisque son opinion se trouvoit véritable et confirmée, quoique par des raisons différentes des siennes; que les plus fameux conquérants ne s'estimoient guère moins heureux, lorsque la victoire leur étoit procurée par les troupes auxiliaires, que si c'étoit par les leurs; ils ne voulurent point, dans les premiers mouvements, entendre raillerie : ils vouloient que ma démonstration fût fautive, puisqu'elle ne pouvoit pas subsister, sans détruire celle de M. Descartes, qu'ils entendoient mettre toujours hors du pair. Mais, comme les plus habiles géomètres qui virent la mienne sembloient y donner leur approbation, ils me firent enfin compliment par une lettre de M. Clerselier, qui est celui qui a procuré l'impression des lettres de M. Descartes. Ils crièrent au miracle de quoi une même vérité s'étoit rencontrée au bout de deux chemins entièrement opposés et prononcèrent qu'ils vouloient bien laisser la chose indécise et avouer qu'ils ne savoient à qui donner la préférence, de M. Descartes ou de moi, sur ce sujet et que la postérité en jugeroit.

C'est à vous, Monsieur, qui êtes sans doute destiné par votre mérite extraordinaire à avoir grand commerce avec elle, à l'informer, si vous le jugez à propos, de ce célèbre démêlé ou, si vous aimez mieux placer

ce petit Écrit parmi vos papiers inutiles, j'y consens et tout m'est indifférent.

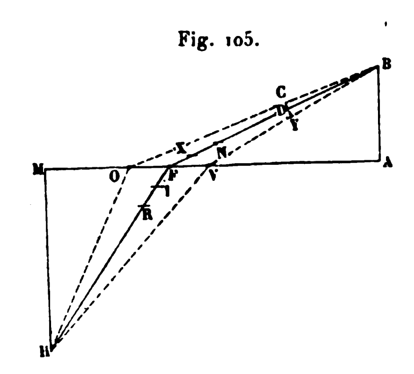
Mais il n'en est pas de même de la très humble prière que je vous fais de me croire, etc.

CXVII.

Démonstration dont il est parlé dans la lettre précédente.

Soit la droite AFM (*fig.* 105), qui représente la séparation de deux différents milieux; que l'air soit du côté de B et l'eau du côté de H. Le

Fig. 105.



rayon de lumière, qui doit aller du point B, qui est en l'air, vers le point F, où commence le milieu de l'eau, se rompt et va vers H, s'approchant de la perpendiculaire, suivant les expériences connues et vulgaires.

M. Descartes détermine ce point H en telle sorte, qu'en tirant une perpendiculaire du point B sur la ligne AFM, qui soit BA, il fait que la ligne AF est à la ligne FM comme la résistance d'un des milieux à celle de l'autre, bien qu'il entende, contre mon sens, que la résistance est plus grande dans l'air qu'elle ne l'est dans l'eau.

Soit donc la plus grande résistance représentée par la ligne AF et la moindre par celle de FM, et par conséquent la ligne AF plus grande que FM. Soit élevée, du point M, la perpendiculaire MH qui soit cou-

pée en H par le cercle dont le centre est F et le rayon FB, si bien que les droites BF et FH seront égales : Je dis que le rayon BF, venant à se rompre par la rencontre de l'eau, ira vers H.

Car, puisque, par mon principe, la nature agit toujours par les voies les plus courtes, si je prouve qu'en passant par les deux droites BF et FH, elle y emploie moins de temps qu'en passant par aucun autre point de la droite AM, j'aurai prouvé la vérité de la proposition.

Or, puisque je présuppose que le mouvement dans l'air est plus aisé et par conséquent plus vite, le mouvement de B en F se fera en moins de temps que celui de F à H et, pour régler la véritable proportion, il faut faire

comme AF à FM (qui sont les mesures des résistances), ainsi BF à FD,

et les deux droites DF et FH seront les mesures du temps qui sera employé de B à F et de F à H : savoir, la droite DF sera la mesure du mouvement par BF, qui est plus vite, et la droite FH sera la mesure du mouvement par FH, qui est plus lent, et ce, suivant la proportion de BF à FD, ou de HF, qui est égale à BF, à la même FD.

Si je prouve donc que, quelque point que vous preniez des deux côtés de DF, la somme des deux droites DF, FH est toujours plus petite que deux droites prises au même sens, j'aurai ce que je cherchois.

Soit donc premièrement du côté vers M le point O. En joignant les droites BO et OH, et faisant

comme BF à DF, ainsi BO à CO,

je dois prouver que la somme des deux droites CO et OH est plus grande que celle de DF et FH; et en prenant de même quelqu'autre point, comme V, de l'autre côté vers A, je dois aussi prouver qu'en joignant les deux droites BV et VH, et faisant

comme BF à DF, ainsi BV à YV,

la somme des deux droites YV et VH est plus grande que celle des deux droites DF et FH.

Pour y parvenir, je fais

comme BF à AF, ainsi FO à FR,

et

comme la même BF à FM, ainsi FO à FI.

Puisque BF est plus grande que AF, donc FO est plus grande que FR et, puisque AF est plus grande que FM, FR est aussi plus grande que FI, et il paraît même que

FR est à FI comme AF à FM;

car, puisque, par la construction,

comme AF est à FB, ainsi FR à FO,

et

comme FB à FM, ainsi FO à FI,

donc, *ex æquo*,

comme AF à FM, ainsi FR est à FI.

Je dis donc que les deux droites CO et OH sont plus grandes que les deux droites DF et FH. Car, par Euclide, au triangle amblygone FHO, la somme des deux quarrés HF et FO est égale à la somme du quarré HO et du rectangle MFO pris deux fois; or, puisque nous avons fait

comme BF ou FH à FM, ainsi FO à FI,

donc le rectangle sous les extrêmes HFI est égal au rectangle sous les moyennes MFO, et le rectangle HFI pris deux fois est égal au rectangle MFO pris deux fois : nous avons donc la somme des deux quarrés HF et FO égale à la somme du quarré HO et du rectangle HFI pris deux fois. Mais le rectangle HFI pris deux fois est égal au rectangle HIF pris deux fois et au double quarré de IF; et le quarré HF, par le même Euclide, est égal au rectangle HIF pris deux fois et aux deux quarrés HI et IF : nous avons donc, d'un côté, le quarré HI, le quarré IF, le rectangle HIF deux fois pris et le quarré FO égaux au quarré HO, au rectangle HIF deux fois pris et au quarré FI pris deux fois. Otez de part et d'autre le rectangle HIF deux fois et le quarré FI : reste, d'un côté, le quarré HI avec le quarré FO égaux aux deux quar-

rés HO et IF. Mais le quarré FO est plus grand que le quarré FI, puisque, par la construction, FO est plus grande que FI : donc le quarré HO est plus grand que le quarré HI, et partant la droite HO est plus grande que la droite HI.

Si je prouve ensuite que la droite CO est plus grande que les deux droites DF et FI, il restera prouvé que les deux CO et OH sont plus grandes que les trois DF, FI et IH, ou que les deux DF et FH : je prouve donc le requis.

Dans le triangle amblygone BFO, par Euclide, le quarré BO est égal à la somme des quarrés BF et FO et au double rectangle AFO; mais, puisque nous avons fait, par la construction,

comme BF à FA, ainsi FO à FR,

donc le rectangle sous BF et FR est égal au rectangle AFO, et par conséquent le quarré BO est égal aux quarrés BF et FO et au rectangle sous BF, FR deux fois pris. Mais le quarré FO est plus grand que celui de FR, puisque la ligne FO a été prouvée plus grande que la ligne FR : donc, si vous substituez le quarré de FR au lieu de celui de FO, le quarré BO sera plus grand que les deux quarrés BF, FR et le rectangle BFR deux fois pris. Mais ces dernières sommes sont égales, par Euclide, au quarré des deux droites BF et FR prises comme une seule : donc la droite BO est plus grande que la somme des deux droites BF et FR. Mais nous avons prouvé que

RF est à IF comme AF à FM, c'est à dire comme BF à FD,

qui est la mesure de la diversité des mouvements : donc,

comme la somme des deux antécédents BF et FR
est à la somme des deux conséquents DF et FI,
ainsi BF à FD.

Or

BO est à OC comme BF à FD :

donc

comme BO est à OC,
ainsi la somme des deux droites BF et FR
est à la somme des deux droites DF et FI.

Mais nous avons prouvé que la droite BO est plus grande que la somme des deux droites BF et FR : il est donc vrai que la droite CO est plus grande que la somme des deux droites DF et FI, ce qu'il falloit prouver en second lieu.

Il n'y a donc aucun point du côté de M par où le rayon puisse passer sans y employer plus de temps que par le point F. Il reste à prouver la même chose au point V.

Si l'on fait, comme ci-dessus,

comme BF à FA, ainsi FV à FN,

et

comme la même BF à FM, ainsi FV à FX,

NF sera à XF comme AF à FM, c'est à dire comme BF à FD,

par la preuve précédente, et chacune de ces deux droites NF et XF sera plus petite que VF, par ce qui a précédé.

Il faut prouver que la somme des deux droites YV et VH est plus grande que la somme des deux droites DF et FH.

Je considère premièrement que, par Euclide, dans le triangle amblygone VFH, la somme des quarrés HF et FV et du rectangle MFV pris deux fois est égale au quarré VH; mais, puisque, par la construction, il a été fait

comme BF à FM, ainsi FV à FX,

donc le rectangle BFX ou le rectangle HFX (puisque BF et FH sont égales) est égal au rectangle MFV : nous avons donc, d'un côté, la somme des quarrés HF et FV et du rectangle HFX pris deux fois égale au quarré HV. Mais le quarré FX est moindre que le quarré FV : donc la somme des quarrés HF, FX et du rectangle HFX pris deux fois est moindre que le quarré HV. Or cette somme est égale au quarré fait des deux droites HF et FX comme d'une seule, par Euclide : donc la somme des deux droites HF et FX est moindre que HV, et HV est plus grande que ces deux droites HF et FX.

Si je prouve donc que la droite YV est plus grande que la droite DX, il restera prouvé que la somme des deux YV et HV est plus grande que la somme des trois DX, XF, FH, c'est à dire que des deux DF, FH.

Pour faire cette dernière preuve, je considère le triangle amblygone BVF auquel, par Euclide, les deux quarrés BF et FV sont égaux au quarré BV et au rectangle AFV pris deux fois; or, puisque, par la construction, nous avons fait

comme BF à FA, ainsi VF à FN,

donc le rectangle BFN est égal au rectangle AFV, et partant la somme des deux quarrés BF et FV est égale à la somme du quarré BV et du rectangle BFN pris deux fois. Or le rectangle BFN pris deux fois est égal au rectangle BNF pris deux fois et à deux fois le quarré FN : donc la somme des deux quarrés BF et FV est égale à la somme du quarré BV, du rectangle BNF pris deux fois et du quarré de FN pris deux fois. Or le quarré BF est, par Euclide, égal au quarré BN, au quarré NF et au rectangle BNF pris deux fois : nous avons donc la somme des quarrés BN, NF, FV et du rectangle BNF pris deux fois égale à la somme du quarré BV, du rectangle BNF pris deux fois et du quarré de FN pris deux fois. Otez de chaque côté le rectangle BNF pris deux fois et le quarré NF : il restera donc que le quarré de BN et le quarré FV seront égaux aux quarrés BV et FN. Or le quarré FV est plus grand que le quarré de FN, par la construction : donc le quarré BV est plus grand que celui de BN, et partant la droite BV est plus grande que la droite BN.

Mais nous avons prouvé que

comme la droite BF est à FD, ainsi NF est à FX :

donc

comme la droite BF est à FN, ainsi sera DF à FX,

et, par la conversion des raisons,

comme BF à BN, ainsi sera DF à DX,

et

comme BF à DF, ainsi BN à DX.

Mais nous avons fait

comme BF à DF, ainsi BV à YV :

donc

comme BV à YV, ainsi sera BN à DX.

Mais nous avons prouvé que BV est plus grande que BN : donc YV le sera plus que DX.

Or il a été déjà prouvé que VH est plus grande que les deux droites HF et FX : donc il est pleinement prouvé que les deux droites YV et VH sont plus grandes que les trois DX, XF et FH, ou que les deux DF et FH, et ainsi la démonstration est complète.

Il suit de là qu'en posant mon principe, que la nature agit toujours par les voies les plus courtes, la supposition de M. Descartes est fausse, lorsqu'il dit que le mouvement de la lumière se fait plus aisément dans l'eau et les autres corps denses que dans l'air et les autres corps rares.

Car, si cette supposition de M. Descartes étoit vraie et que vous imaginiez qu'en ma figure l'air est du côté de H et l'eau du côté de B, il s'ensuivroit, en transposant la démonstration, que le rayon qui partiroit du point H et rencontreroit l'eau au point F, se romproit vers B, parce que, le mouvement par l'air étant plus lent selon la supposition de M. Descartes, il seroit mesuré par la droite HF, et celui qui se fait dans l'eau seroit mesuré par la droite FD, comme étant plus vite, de sorte que, les deux droites HF, FD étant les plus petites, la réfraction se feroit vers B, c'est-à-dire que le rayon s'écarteroit de la perpendiculaire, ce qui est absurde et contre l'expérience.

Si la situation des deux points B et H change dans les deux lignes BF et FH prolongées de part et d'autre autant que vous voudrez, la démonstration aura lieu et vous le verrez de vous-même.

Je n'ajoute point l'analyse, car, outre qu'elle est longue et embarrassée, il vous doit suffire que le retour que vous venez de lire est court et purement géométrique.

Il suit de tout cela que, lorsque les deux points B et F sont donnés, ou bien H et F, on peut trouver aisément le problème par les plans; mais, lorsqu'on donne deux points, comme B et H, et qu'on veut chercher par eux le point de réfraction dans la ligne ou plan qui sépare les deux milieux, en ce cas le problème est solide, et ne se peut construire qu'en y employant des paraboles, des hyperboles ou des ellipses. Mais,

comme cette invention n'est guère malaisée à un géomètre médiocre, en demeurant d'accord du fondement et de la proportion sur laquelle il doit travailler et que je vous ai déjà expliquée, je n'ai garde de douter que vous la trouviez d'abord, vous, Monsieur, qui êtes si fort au-dessus du commun.

Outre que, ne s'agissant proprement, dans la question que vous me faites, que d'apprendre quelles sont les voies de la nature, j'y ai déjà satisfait, et que cette grande ouvrière n'a pas besoin de nos instrumens et de nos machines pour faire ses opérations.

CXVIII.

SAPORTA A FERMAT [1].

A MONSIEVR | FERMAT | CONSEILLER DV | ROY AV PARLEMENT | DE TOLOSE. |

MONSIEVR,

Ie vous rends ce qui est vostre : cette traduction que ie vous presente du Traicté de Torricelli du mouvement des eaux est à vous, parce que vous m'avés fait l'honneur de m'exhorter à y travailler, et que vous m'avez fait cognoistre, qu'elle ne pouvoit mieux paroistre en public, qu'en suite du Traicté de la mesure des eaux courantes de Castelli, qu'il recognoist pour son Maistre, et sur les demonstrations duquel il appuye presque toutes ses propositions. Mais elle vous appartient, MONSIEVR, à un plus iuste tiltre, puisque cét ouvrage, qui

(1) Dédicace de l'ouvrage intitulé :
Traicté du | mouvement des | eaux d'Evangeliste | Torricelli Mathema | ticien du Grand Duc | de Toscane. | Tiré du Traicté du mesme Autheur, | du mouvement des corps pesans qui descendent | naturellement, et qui sont jettez. A Castres, | Par Bernard Barcouda, Imprimeur | du Roy, de la Chambre de l'Edict, de la dite | Ville et Diocese. 1664.
Ce Traité est joint à celui de Benedetto Castelli dans le volume publié par Saporta (*voir* Tome I, p. 362); la dédicace adressée à Fermat occupe les pages 59 à 61 du dit volume.

a esté composé par vn des plus sçavans Mathematiciens d'Italie, sur vne matiere tres-curieuse, et toute nouvelle, ne pouvoit mieux estre exposé aux yeux du public, que soubs la faveur de celuy que tous les plus grands Mathematiciens, ie ne dis pas de la France seulement, mais aussi de toute l'Europe admirent, et reverent d'vne façon toute particuliere. Lors qu'ils ont des difficultez dans ces sciences abstruses, dont les inventions admirables font voir et l'excellence, et la divinité de nostre ame, ils recourent à vous, Monsievr, comme à l'Oracle qui dissipe en un moment les tenebres qui les envelopoient auparavant. S'ils ont quelque dispute entre eux sur quelque point, dont ils ne puissent pas s'accorder, ils vous choisissent pour l'Arbitre de leurs differens, et ils se soumettent avec respect à la decision que vous en faites. Tous les sçavans en toute sorte de Literature vous consultent sur les passages difficiles qu'ils rencontrent dans les livres. Ie pourrois rapporter un grand nombre d'excellentes remarques que vous avez faites sur Synesius, sur Frontin, sur Athenée et sur plusieurs autres Auteurs et les esclaircissemens que vous avez donnez a des lieux obscurs qui n'avoient pas esté entendus par les Scaligers, les Casaubons, les Petaus, et les Saumaises. Enfin il semble, Monsievr, que vous estez né pour gouverner l'Empire des Lettres, et pour estre le Souverain Legislateur de tous les Sçavans. Si i'avois dessein de faire votre Panegyrique, j'estalerois icy toutes les cognoissances que vous avez, qui sont capables de rendre les hommes, et plus doctes, et plus gens de bien. Ie parlerois de vostre iugement dans les affaires du Palais, ou vous avez passé la plus grande partie de vostre vie, et ou vous avez fait paroistre tant d'integrité, et tant de suffisance en l'administration de la Iustice, qu'il y a de quoy s'estonner, qu'ayant acquis toutes les qualitez d'un grand Iuge, vous ayez peu acquerir vne parfaite intelligence de tant d'autres choses, qui sont si differentes de cette sorte d'estude. Ie pourrois dire avec verité que la force, et l'estenduë de vostre genie, a surmonté toutes les difficultez qui decouragent, ou qui arrestent les autres : que vous comprenez comme en vous ioüant, ce qui occupe l'attention des plus subtils, et que vous

penetrés dans peu de iours, et avec peu de peine, les matieres les plus difficiles, qui travaillent les esprits les plus vifs, et les plus solides, des années entieres. Mais i'en dis trop, MONSIEVR, pour vostre modestie, quoy que ie n'en die pas assez pour vostre merite, n'y pour la passion que i'ay, de vous tesmoigner, combien ie suis,

MONSIEVR,

Vostre tres-humble et
tres-obeissant serviteur,

SAPORTA.

VARIANTES ET NOTES CRITIQUES.

LISTE DES SOURCES.

A = Manuscrit Arbogast-Boncompagni (*voir* Tome I, Avertissement, p. XXII).
A' = Brouillons d'Arbogast, dans le MS. Bibl. nat. fr. n. a. 3280 (f^{os} 91 à 98, 120 à 192).
B = Manuscrit Vicq-d'Azyr-Boncompagni (*voir* Tome I, Avertissement, p. XXVII).
C = Copie des manuscrits de Clerselier, prise à Vienne par Despeyrous, dans le MS. Bibl. nat. fr. n. a. 3280 (f^{os} 25 à 90).
D = Édition des *Lettres de M. Descartes* par Clerselier, Tome III, Paris, 1667.
E = *Commercium epistolicum* de Wallis, Oxford, 1658.
F = MS. Bibl. nat. fr. n. a. 6204.
G = *Gassendi Opera omnia*, édition de Lyon, 1658.
H = *Correspondance de Huygens*, publiée par la Société hollandaise des Sciences (La Haye. 1888 etc.).
I = MS. Bibl. nat. latin 8600.
K = MS. Bibl. nat. latin 11 196.
L = Lalouvère, *Veterum Geometria promota in septem de Cycloide libris*, Toulouse, 1660.
M = MS. Bibl. nat. fr. 17 388.
N = MS. Bibl. nat. fr. 17 390.
O = MS. Bibl. nat. fr. 17 398.
P = *Œuvres de Pascal*, édition de 1779.
P' = Recueil d'opuscules de Pascal, Bibl. nat. imp. Réserve V, 859.
Q = MS. Bibl. nat. fr. 20 945.
R = MS. Bibl. nat. latin 7226.
S = *Traité de la mesure des eaux courantes de Castelli*, traduction Saporta, Castres, 1664.
T = MS. Bibl. nat. fr. 13 026.
Va = Édition des *Varia Opera* de Fermat, 1679.
X = MS. Bibl. nat. fr. n. a. 5160.

VARIANTES ET NOTES CRITIQUES[1]

Lettre I. **3**. ligne **1** par ces B, pour ces A **4** feront B, feroient A **10** jusqu'à A **6, 2** sera]A *ajoute* pour **7, 2** une *om.* A **9, 1** envoieray B, enverrai A **10, 8** de *om.* A **11**, 3 sceu B, pu A **4** ce *om.* A.

II (*Va*, p. 143). Les paragraphes **1** et **2** forment la fin des *Nova in Mathematicis theoremata* (Pièce V). P. **9, 20** (*Va*, 144) **26** D]AD **28** Quod erat demonstrandum] GED.

III (*Va*, 121). **4**, 10 ita|AB (*Va*, 122).

IV (*Va*, 122). P. **18**, 18 la]le **25** (*Va*, 123) **26** proportion]proposition P. **20**, 5 la]que la

V (*Va*, 142). **3, 2** ipsa CB]ipsa AB. P. **24**, 6 B]C. P. **25**, 6 et|in (*Va*, 143) 7 C]D ★ D]C **7**, 3 constitutura]. Le fragment continue, dans les *Varia*, par les paragraphes **1** et **2** de notre Pièce II.

VI (*Va*, 143). **2**]**1**. **2**, 5 la première]le premier **4**, 9 l'avouer]*Va ajoute* Je suis etc.
La suite se trouve intitulée dans A : *Fragment d'une lettre à Mersenne* (*le commencement manque*); dans B : *Fragment d'une lettre de M. Fermat du* 15 *juillet* 1636. **5, 2** baille A, envoye B **6, 2** proportionnelles *om.* A **7, 11** pouves B, pourrez A P. **30**. 5 trois ou de]2 ou B. **8**, 1 Et B, Je A. B *omet la date.*

VII (*Va*, 133). P. **32**, 15 le]les P. **33**, 9 NB]CB **11** gravia|æqualia (*Va*, 134). P. **34**, 10 ecce]cum **14** FHN]FH, in ★ N]M (*de même* 17). **16** FHN]FHM (*de même* 18) 17 HF]MG 18 HN]HA.

VIII (*Va*, 124). *Suscription :* A Paris, le 16 aoust 1636. **2, 1** que]lequel **4/5** desquelles conditions, au principe dont il s'agit, la principale manque, sçavoir 6 d'où vient] quelle est 7 cette]leur ★ Ainsi... les corps **3, 5**] ce qui n'étant point en nôtre connoissance (comme il faut librement avoüer, et en cecy, et quasi en toutes les autres choses physiques) il est évident qu'il nous est impossible de determiner, ce qui arriveroit au centre où les choses pesantes aspirent, ny aux autres lieux hors la surface de la terre, sur laquelle, parce que nous y habitons, nous avons quelques expériences assez constantes, desquelles nous tirons ces principes en vertu desquels nous raisonnons en la Mechanique.

(1) Les chiffres égyptiens (gras) désignent les paragraphes des lettres, à moins qu'ils ne soient précédés d'un P., auquel cas ils indiquent la page; les lignes sont comptées à partir de la première du paragraphe, si elle est dans la même page; autrement à partir de la première de la page.

La diversité des opinions touchant l'origine de la pesanteur des corps, aucune desquelles n'a esté jusques icy ny demontrée ni convaincue de fausseté par demonstration est un ample témoignage de l'ignorance humaine en ce point.

(*Va*, 125). La commune opinion est, que la pesanteur est une qualité qui reside dans le corps même qui tombe.

D'autres sont d'avis que la descente des corps procede de l'attraction d'un autre qui attire celuy qui descend, comme [le globe *aj.* P) de la terre [paroît attirer une pierre qui tombe *aj.* P]. Il y a une troisième opinion qui n'est pas hors de vraysemblance; que c'est une attraction mutuelle entre les corps, causée par un désir naturel que ces corps...

3, 5 clair]évident 6/7 le fer ne l'étant pas, l'ira trouver **12** seront... quelque lieu **4**, 3] sont fort différentes, particulièrement de la première et des autres, comme nous fairons voir en les examinant.

Car si la première est vraye, le sens commun nous dicte qu'en quelque lieu...

4, 4 poids] corps pesant ★ pèse] pesera 10 avoir égard] considerer 11 centre commun]. *Addition :* Si cette première opinion est veritable, nous ne voyons point que le principe que vous demandez pour la Geostatique puisse subsister. **12** Car soient deux poids 15 A et B 19 Nous... équilibre 21]. Suivant cette première opinion, nous accordons que si le point C est uny au centre des choses pesantes, le composé des poids AB demeurera immobile veritablement. **22** au]avec le ★ centre commun des choses pesantes, combien que l'un des poids en soit plus proche que l'autre, ils contrepeseront (**24**). **25** comme par le point C *omis*. **26** paroles mêmes]propres termes **27** pour]de **28** par dessus]sur P. **38**. *Le premier alinéa est omis.* 8 car il n'a pas esté demontré que le point C soit le centre de pesanteur du composé AB, sinon lorsque la descente des corps se fait naturellement par des lignes parallèles; ce qui est contre vos suppositions et les nôtres, et contre la verité, et mémo nous ne voyons pas qu'aucun corps, horsmis la Sphere, ait un centre de pesanteur, posée la definition de ce centre selon Pappus et les autres Autheurs : et quand il y en auroit un en chaque corps, il ne paroit pas (et n'a jamais esté demontré) que ce seroit (**12**). **13** commun]des choses pesantes **15** figures] *addition :* comme en la seconde des deux figures suivantes. **16** commun]de pesanteur.

5, 1 du]d'un 3 même]l' ★ nous]vous 4 semblable]pareille ★ AB|(*Va*, 126) (puisque vous le voulez appeler ainsi) d'autant que ces poids ne pressent (5/6) 7 C, D ou E *omis* 9 le porter]se porter. P. **39**, 2 près]proche 3 C *omis*. 6 jugement] *la fin de l'alinéa est omise.*

6, 1 en ce cas des]suivant cette première opinion, de 3 pour... sentiment *omis*. 4 Soient donc deux ★ A et B 5 dans laquelle le point C soit le centre de pesanteur du composé des corps AB, selon les anciens; ce point C ne sera pas (6) 7 pose]met 9 qu'il]que ce composé 15 contrepèsent avec]soit de même pesanteur que

7. *Paragraphe omis.*

8, 1. Si la seconde opinion touchant la cause de la descente des poids est veritable, voicy les consequences qu'on en peut tirer, selon nôtre jugement. Soit (4) 6 les parties du même corps, en sorte que chacune selon sa puissance, tire à soy le corps attiré, ainsi que supposent les Auteurs de cette opinion.

Sur cette position, le sens commun nous dicte que les distances et autres conditions estant pareilles, les parties égales du corps attirant attireront également, et les inégales, inégalement.

Soit donc le corps attiré L(6) 8 menée]méme. P. **41**, 2 marqués]pris 6 puissance]vertu entiere 7 là où]ou étant 10 venu]parvenu 11 toujours *est placé après* sera 12 et]mais 13 retire]contretire 14 force]vertu 17 mais cette diminution ne sera pas en la raison des lignes HA, HK, HI, ce que vous connoitrez en le considerant sans autre explication.

Si la troisième opinion de la descente des corps est veritable, les conclusions que l'on (*Va*, 127) en peut tirer sont les mémes, ou fort approchantes de celles que nous avons tirées de la seconde opinion. *Suit le paragraphe* 9.

9, 3 d'icelles]d'elles 5 conclusions]consequences 7 desquels l'experience assistée d'un bon jugement, nous a rendus certains.

Pour ces considerations, dans nos conferences de Mechanique nous appellons des poids égaux ou inégaux ceux qui ont égale (10) 11 un méme corps est dit]nous entendons un méme corps P. **42**, 3 arrive ou non 4 ce]chose 5 contente]satisfasse 6 et nous raisonnons]raisonnans 7 en *omis*.

10, 1 Pour]Quant à 3 et l'autre]mais l'autre est 9 et soit considerée la circonference CNB 10 mène]remue 12 contrepèseront l'un à l'autre et *omis*. 15 seront]seroint ★ points]extremitez 16 éloignées. P. **43**, 2 pour les avoir démontrées par des principes qui nous sont plus clairs et plus connus (4) 5 distinction à faire, laquelle est de grande consideration. Sçavoir que quand (6) 9 mais quand ★ d'un]un 13 enfin]finalement 15 vers N]vers P.

11, 1 Si *etc.*]Cette distinction estant vraye comme elle est, vostre second principe ne peut subsister, ce qui paroîtra assez par l'examen d'iceluy.

Vostre second principe est tel. Soit A (4). 5 est B]est D 6 force]puissance 8 D.|(*Va*, 128) P. **44**, 1 posé]mis 6 s'éloigner]éloigner le levier 8 en général]généralement 11 quoique contraires à votre supposition *omis*. **12/13** et nous vous en expliquerons les principaux cas que vous connoistrez veritables sans aucune demonstration. *Suit le paragraphe* **12**.

12, 2 et *omis*. 4 demeurons P. **45**, 1 force]puissance.

13, 6 bouts]extrémités 10/12 et quand cet appuy sera osté, le tout demeurera de méme qu'avec l'appuy, ce qui est assez clair. 15 alors *est ajouté avant* celles. 19/20 que lorsqu'elles sont ramassées en B.

14, 1/2 chacun plus grand P. **46**, 1 DC]CD 4 ramassez (*de méme* 9) 8 B]vers P *ajouté*. ★ ce qui seroit arrivé] comme il arriveroit

15, 2 les]des 6 qu'on]que l'on 9 aux points]sur les parties 13 (*Va*, 129) ★ Ainsi, considérant]Partant ★ sont]seront ★ ils *omis* 14 chargent]chargeront. P. **47**, 1 sur l'arc GBH 5 aura]a ★ ramassez 9 même *omis*. 10 *Addition :* Cette derniere consideration pourroit bien estre cause qu'un méme corps peseroit moins, plus proche que plus éloigné du centre commun des choses pesantes : mais la proportion de ces pesanteurs ne seroit nullement pareille à celle des distances, et seroit peut-estre tres difficile à examiner.

16, 3 éloignés de A centre commun 6 GI est à 9 assez *omis* ★ des]de vos 10 les] ces 10/11 resteroit aucune difficulté 11 à peu près *omis* 11/12 ainsi. Soit faite la preparation suivant la methode d'Archimede 13 E]Q (*de méme dans la suite du paragraphe*). P. **48**, 2/3 duquel etc.]lequel arc sera quelquefois moindre que la circonference entière, quelquefois égale à icelle, et quelquefois plus grand. Et d'autant que les

portions IB, IQ sont égales, 3 BGIRQ 4 par le premier principe sur l'appuy I. 7 pèse] posé 8 Car tous ces] Partant, puisque ces deux 9 pèseront] pesent ★ puis donc] et 10 faisoient] font ★ même *omis*. 13 feroit] reçoit 14 pas] point 16 pouvons 17/19 instances dont la première est telle. Au levier GIR, soit l'angle GIR droit

18, 1 Soit A le centre 2 A *omis*. 3 GI | soit (*Va*, 130) 6 l'on] on 6/7 faisant...R] mettant en C le méme poids qui estoit en R 9/10 faisant... C] faisant ID estre le bras du levier et mettant en D le méme poids qui estoit en C 12 à IG] en G 13/14 raisonnant à l'ordinaire] par le raisonnement ordinaire 16 seroit] sert 18 fait] fasse **P. 50,** 1 (ce qui est facile à démontrer) 2 de] hors 2/3 on conclura quelque chose de choquant de votre position.

19, 1 parce que ★ tout *omis*. 2 faire par des hommes, des poids à l'égard de leur centre naturel 3 la faire alentour d'un centre artificiel, supposant 5/6 agiroient] tendent 7 conforme à ce raisonnement 8/10 *Alinéa omis.*

20, 1 agreable de continuer nos communications sur ce sujet ou sur celuy de la Geometrie 2/4 ceux de ce temps, nous tâcherons à vous donner contentement : et ce que nous vous proposerons 5 car nous vous en envoyerons

IX (*Va*, 130) 3 (*Va*, 131). **P. 53,** 18 ACD] ad CD 24 CD | . Igitur (*Va*, 132). **P. 54,** 2 horizontis **6,** 1 terre] lettre **7.** 3 parabola 4/5 conois parabolicus archimedæus 6 novus conois **9,** 9 composé] compris.

X (*Va*, 123) **2,** 15 quatre. | en (*Va*, 124). **3,** 5 de Pascal

XI (*Va*, 134). **1,** 12 prin | cipes (*Va*, 135) **3,** 14 BCA] BC, CA **4,** 6 la *omis*. 7 | parce que (*Va*, 136) **5,** 3 menez] niez

XII (B *a comme titre :* Epistola Dmi de Fermat ad R. P. Mersennum.) **1,** 1 Davum] damnum A **P. 64,** 1 te] se A **2,** 2 ita] sic A 7 problematis B, problematibus A (*de même* **3,** 1) 9 quadratoquadrata A **3,** 3 ipsis *répété* B 4 pulcherrimi A **P. 66,** 2 admitti *om.* B. 4 diminutum B (*de même plus loin*) 7 ex his propositionibus B (*peut-être mieux*). **4,** 1 abs te A ★ construimus A 7 contingerit A **7,** 7 2025] 1925 B (A *a corrigé en marge*). 8, 10 exordium *corrigé de* originem B. ★ B donne en marge le calcul des nombres 180 et 1890, plus loin de 10170 (avec une erreur) et de 7965. **P. 68,** 10 abs] *corrigé en* à par A. **9,** 6/7 De multangulis numeris A 9 majori AB 14 1° *om.* B **P. 69,** 7 omnibus] numeris B. 9 præcepta] quæsita AB. **10,** 1 nolumus B 2 Arithmeticæ A 3 venamur | *corrigé de* invenimus A **11,** 5 aucto] aucti AB 8 exemplum] B *ajoute :* 1.2.3.4. 10 auctum] aucti AB 11 et fit B 15 et superest B **P. 70,** 2 præcedentis A ★ B donne les calculs en marge. **12,** 2 lucem] *corrigé de* ansam B 9 eà] sic A **13.** B *ajoute la souscription :* Au Reverend pere Mersenne minime.

XIII (*Va*, 136) **3.** 4 1°] Premièrement 7 in | conchoide (*Va*, 137) **4,** 3 des] de **5.** 3 1°] premier **P. 74,** 9 in] et

XIV. (Texte d'après R; leçons de *Va*, 138). **1,** 2 promis **2,** 2 en] vers 7 la partie inferieure 8 chose méme 12 quoi] qui 15 bout] point **P. 76,** 10 de direction *omis.* 15 doublé] double 19 cette] la 20 bras AB, AC 23 deux *omis.* **P. 77,** 1 double 4 et *omis* 10 forces ★ Ainsi] Aussi 12 être | entendues (*Va*, 139) 14 supposons] posons 21 AC, AG **P. 78,** 20 demonstrons **P. 79,** 1 demonstrons 5 menées *omis.* 19 entendues] imaginées ★ et *omis.* **P. 80,** 2 sorte sur le bras AC *omis* 3 E] sur | le bras AC

ajouté (*Va*, 140) ★ axiome]principe 13 entendues]imaginées 16 axiome]principe 25 *Fin du texte de* R. 9 (*Va*, 141)

XV (*Va*, 146). 3, 3 vous supposez]*commencement dans* B *d'un* Extraict d'une lettre du IIIme nobre 1636 à M. Roberval pour la quadrature de la parabole. ★ vraye *Va*, *om.* B. ★ possible pas B, pas peut estre *Va*. P. 84, 2 grande *om.* *Va*. 5 plus *om.* *Va*. 19 qui est tout ce qu'on peut B, qui comprend entièrement tout ce qui se peut *Va*. P. 85, 7 la quadrature B (*qui s'arrête à ce mot*), les quadratures *Va*. 5, 4 et | que (*Va*, 147) 8/9 de son diamètre *et* en sorte *paraissent des additions suspectes*. 7, 5 conoidem (*de même* 6) 10/11 Ellipsioidem P. 87, 8 ID]HD ★ DY]DI

XVI (*Va*, 141). P. 88, 16 Intelligitur 17 GI]GC P. 89, 5 ACDE]ACDC 7 BD]ED 10 (*Va*, 142).

XVII (*Va*, 147). P. 90, 15 CA | naturaliter (*Va*, 148) P. 91, 8 desquels]duquel

XVIII (*Va*, 148). 1, 11 vous | verrez (*Va*, 149) 3, 2 *Le nom* Sainte-Croix *est remplacé par des points*. P. 95, 14 conoïdum 23 (*Va*, 150) P. 97, 26 (*Va*, 151) P. 98, 14 HC]HA 21 eadem 22 AC]IC ★ secantes]stantes.

XIX (*Va*, 151). P. 101, 3 puncto | A (*Va*, 152) 11 M *omis*. P. 102, 11 B]N.

XX (*Va*, 152). P. 103, 14 (*Va*, 153)

XXI (*Va*, 153). 3, 1 de *omis après* M. (*de même* 2) 5 avec | franchise (*Va*, 154)

XXII (D). P. 108, 2 *et* 3 qu'on]qu'il

XXIV (Variantes de D; texte de C). 1, 5 me sera garand. 2, 10 de venir sans marchander 3, 7 qui continue]de 4, 1 Je viens 5, 7 sa détermination 6, 7/9 or... auparavant]Mais 10 qu'elle ne faisoit auparavant; Et si 13 le]ce 7, 5 à *Desc.*, de C 7 ce *Desc.*, le C 8, 3 entendre]comprendre 6 changera P. 120, 1 pourrions D, pouvions C 9, 1 la]sa 7 la]cette 19 c'est-à-dire]ou P. 121, 5 parce que 10, 13 le portera 17 tout *omis*. 11, 5 de même nom 12, 3 FA est à AB c'est à dire comme FG à BN 5 CB est à BN P. 123, 4/5 conclusion pareille 7 CB]BC est 9 Maintenant *ajouté avant* Du 10 égaux]entr'eux *ajouté*. 12 conséquent 17 première]precedente 19 DAF]est *ajouté*. 14, 1 figure]force P. 124, 6 cette]la 12 qu'elle]que celle-cy 15, 5 pleinement *omis*.

XXV (Variantes de D; texte de X). 1, 2 pource que... soit]parce que je n'en sçaurois parler autant que je voudrois 4 celuy-là mesme ★ tâché]entrepris. 2, 3 contingentes]tangentes ★ trouve]prouve Fig. 60. *La ligne* OI *n'est pas tracée dans* X; *les lettres algébriques qui suivent y sont en minuscule*. 15 iterumque... BE *om.* X 18 B, et le costé P. 128, 6 maxime 16 X *ajoute en note* : Il dit qu'il faut mettre *viis a prioribus diversis* ou *per diversum medium* ou quelque chose de semblable pour rendre la regle bonne. 3, 1 bien encore ★ même *omis*. 2 tangente 7 autre *omis*. 9 ergo probavimus CE P. 129, 1 se *om.* X. 4, 7 est *omis*. 10 encore que]quand 12 eût eu 13 même D, premier X. 6, 5 tangentes P. 130, 6 sont]font ★ font D, est aussy X. 11 tangentes 7, 5 autres]Autheurs P. 131, 6 de]du 9 tangentes 10 n'en peut D, n'eut peu X. 8, 2 tangentes 8 que j'ay fait 15 cube du cube 16 quarré du cube

XXV bis (A, B). 1, 4 MM. Pascal A 5 parce que A 6 des doutes A 9 construction]demonstration A 2, 12 plût de me A 3, 3 propositions de A 4, 1/2 je veux encore lui faire part A 3 les]le A P. 134, 1 quelqu'un A 2 M. Roberval A 5, 2 de

om. D **6**, **2** Et par exemple D, Comme par exemple B **4** parabole] par exemple *aj.* B ★ tel] quelque D **10/11** C'est... sophistiques *om.* D **10** ces B, mes A **13** que l'on A. qu'on BD ★ demandera] voudra D P. **135**, **1** tels nombres D.

XXVI. **6**, **7** le A, ce A′ **13** l'égalité A, égalité A′ P. **138**, **3** déduire par le menu A, décrire pour le moment A′.

XXVIII (D). P. **146**, **9** les] la

XXIX (*Va*, p. 154). **2**, **2** de minimis et minimis *entre parenthèses*. **3**, **7** lui-mê | me (*Va*, 155) P. **149**, **1**, **2**, **6**, **7** B bis] B². P. **150**, **5** pouvez] prouvez **6**, **8** dato] datâ

XXX (A, B). **2**, **9** son A, un B **3**, **6** franchir A, traverser B **16** comme B, ce que A **24** punctum] *Dernier mot de* B.

XXXI (A, A′). P. **155**, **9** satisfait] *corrigé de* s'étend A′ **13** en suite A, de suite A′ **2**, **1** par exemple A, simple A′ P. **156**, **4** avec] aux AA′ **3**, **2** pareille] *corrigé de* egalle A′ **5** courbe] *corrigé de* convexe A′ **10** soit A, est A′ ★ pareille A, egalle A′ **11** avec A, en conservant A′ **12** par adéquation A, pour $\frac{\text{adegaller}}{\text{adæquare}}$ (*sic*) A′. P. **157**, **9** Otant A′ **13/14** les deux cubes *om.* A **16** Divisant A′ ★ ôtant A′ **17** avec] aux A′ **19** nous aurons A, on aura A′ P. **158**, **3** sera A, soit A′ (*de même* **4**) **5** fera A, fasse A′ **6** aisement A, ainsi A′ **10** car autrement A, aux autres A′ **4**, **7** de *om.* A′ **5**, **1** *de*] des A′ P. **159**, **6** ligne (*av.* OA) A, droite A′. P. **160**, **3** en sorte A, de sorte A′ **14** fera A′. sera A ★ OI] OE (*de même* **16**) AA′ P. **161**, ligne dernière, *le dénominateur* A *est omis*.

XXXIII (A, B). **1**, **2** prenez] avez prise A. P. **165**, **7** j'ai baillé] je laisse **3**, **2** connoître] *corrigé de* trouver B. **5**, **3/4** croyez-moi *om.* A **5** humble serviteur] etc. A. **7**, **6** parties B, portions A. P. **167**, **8** de *om.* A.

XXXV (A, B). **1**, **1** vous *om.* B **2**, **8** cette longueur B, ces longueurs A **10** par B. de A **12** que (*après* point) *om.* B. P. **170**, **12** que (*après* et) *om.* B P. **171**, **12** On fera avec la même facilité A. **3**, **2** je veux vous A. **4**, **1** en (*après* exemple) B, de A **2** en] de A **5**, **3** mêmes A **5** trouver B, mener A P. **173**, **1** focus B, foyer A **6**, **2** de] d'en A **3** encore *om.* B **6** marquée B, imaginée A **7** sommet *om.* B ★ MB] MA P. **174**. **1** semble être] est A ★ l'estrivière B, l'affinité A **2** punctis] etc. *aj.* A **7** superficie] *Libri a corrigé en* périphérie. **10** que quel point que AB ★ preniez] prendrez A **9**, **1** trouver] mener A P. **175**, ligne avant-dernière : S'il y a manque en B, Si j'ai manqué ici A. P. **176**, **4/5** trouveres B, trouvez A **9** Votre. etc. A *qui omet le reste de la lettre*.

XXXVI (AB). **1**, **2** les longueurs A, **3** rebutent A P. **177**, **5** leur] le A **6** les expériences A ★ faites A. **2**, **1** comme] etc. A **3** particulièrement] en particulier A **4** aux] ou B ★ de] desdites A **7** le dernier exemple] la dernière B ★ sur quoi] quoique A **7/8** m'avez] m'ayez A **8** de me faire savoir A **3**, **4** appellé A **6** *et suiv.* lat.] latus B P. **178**, **2** ou] en A **4**, **1** proposerai A, reserve B **2** j'étends encore] je cède à donner A **3** renchérit A ★ et] je A **9** dérive] déduit A **10** trouver] savoir A **11** valent] vallût A.

XXXVII (B). **4**, **7** $\sqrt{288}$] $\sqrt{285}$

XXXVIII bis (*Va*, 173). **6**, **2** sorte | de (*Va*, 174) ★ tel] le B **3** encore *om.* B ★ etc. *om.* B. P. **190**, **2** à quoi... possible (5/6) *om.* B **6/7** reigle que je n'ay trouvée que lorsque B **9/10**, de ce cas... nouveau *om.* B **7**, **1/3** reigle, c'est que je puis B

4/6 comme... rangé *om.* B. **8**, **1** bien *om.* B ★ et B, en *Va.* ★ sont *Va,* font B **6** ce qui est, ce me semble, une *Va.* **8** cube de soixante-quatre B **8/9** à côté du quarré de 14 *om.* B **11** le deuxième] le 2^me^ B, et le second *Va.* P. **191**, **4** et il y aura *Va.* **4/5** chacune desquelles B, desquelles chacune *Va.* ★ B *omet les paragraphes* **9** *et* **10**. P. **192**, **2** en B, *om. Va.* **3** et délectables] etc. B ★ les *om.* B. **4** Voicy B, Voyés *Va.* ★ l'endroit où il *Va.* **6** de haut en bas qu'à côté *Va.* **9** avoir seulement fait *Va.* **11** je dis *om.* B ★ qu' *om.* B **13** mais *Va,* et B ★ la | question (*Va,* 175) **15** 1° *om. Va.* **21** elle devoit être différente *Va.* **23** le 25 *Va,* le quarré de 5 B ★ voicy B, voyez *Va.* P. **193**, **15** un autre B *Va.* **15/16** si le temps... demi-douzaine *om.* B. **26** néanmoins] pourtant *Va.* P. **194** (*Va,* 176).

XXXIX (B). **3**, **4** quarréquarrés] quarrez ★ quarréquarrée] quarrée.

XL (*Va,* 176, B). P. **196**, **3** Je vous prie etc.] B *commence ici comme suit :* Asseurez M^r^ Frenicle qu'il y a plus de dix ans que j'ay une methode generale pour ranger tous les quarrés pairs à l'infiny, mais je n'avois pas songé (**2**, **1**). **2**, **5/6** beaucoup de] plusieurs B **7/8** après ma 1^re^ meditation sur ce subjet B **3**, **2** quarré 22 B *Va.* **10** Parce que *Va.* ★ je diffère à vous] je ne vous puis B **11** entier *om.* B **11/14** jusques... possible *om.* B **13** (*Va,* 177). P. **197**, **9** 300] 003 *Va* **10** 322] 223 *Va* **4**, **3** de quarré *Va* **4/5** de chose *om.* B **5** qu'une... reste] plus de meditation B *qui omet la fin de l'alinéa* **6**, **1** cet abbregé *Va.* P. **198**, **7** radicaux des *om. Va.* ★ parce que *Va.* **9** *Va omet les nombres* 4, 5. **10** leurs *om.* B **21/22** ou que le double de l'exposant *om.* B **28/29** Voilà... appeler] Je puis appeler ces 3 propositions que j'ay demonstrées B **29** de l'invention *om.* B. **7**, **13** et n'abbrege *Va.* **15** je | me (*Va,* 178).

XLI (*Va,* 165). **2**, **2** l'appliquerez **7**, **8** mé | me (*Va,* 166)

XLII (*Va,* 161, B). **3**, **1** B *commence ici :* Voici ce que *et omet* depuis. **5** que je vous donne] que vous voyez *Va.* **8** là pour lors *Va.* **8/9** ait beaucoup de] aye des B **10** ne sont quarrés B P. **204**, **4** bien *om.* B **13** proposition] B *omet le reste de l'alinéa.* **5** **3/4** je dis qu' *om.* B **7** quarré | (*Va,* 162) **6** *Paragraphe omis dans* B.

XLIII (AA'). **1**, **1/2** avec ses expositeurs au-dessus *rejeté après les nombres de la progression* AA'. **6** fassiez A, faites A' ★ tous] que tous A' **7** $\overset{\text{ro}}{\text{trouvent}}$ (*sic*) A, trouvent A' **2**, **3** la progr. que j'y ai fait A' P. **206**, **5** de ceux] des termes A' **3**, **5** *le dernier* 7 *est remplacé par* 21 A'.

XLIV (*Va,* 162, B en partie). P. **207**, **11** deuxième] 3 *Va.* **2** *Commencement dans* B *d'un* Extraict d'autre lettre du 18 octobre 1640 à M^r^ Fr. **4/5** de quoi je m'étois] m'étant B **5** vous en donner B **6** *suiv. :* demonstré, n'ayant encor la demonstraon de l'autre, duquel néantmoins je suis asseuré. Après cela je vous diray le fondement sur lequel j'appuie les progressions (P. **209**, **2**) B P. **208**, **10** vous | m'obligerez (*Va,* 163) P. **209**, **2** progressions] propositions *Va.* **8** tout *om. Va.* **12** ses] leurs B **15** nombre de 13 *Va.* **16** exposant 3 *Va.* **17** puissance de 729 *Va.* **20** trop *om.* B **6**, **3** quels des B, que les deux *Va.* **7** et en telle *Va.* **10** d'étendre B, deffendre *Va.* **12** + 1] — 1 B ★ le quantième] la quantité B **7**, **1** mienne proposition B, de mes propositions *Va.* **1/2** B *omet la parenthèse et* **3** *l'incidente* que sans doute... de vous. **3** que | sans (*Va,* 164) **10** la 23^e^] la 30^e^ B **12** ut supra] comme dessus B **13** premiers et moindres *Va.* P. **211**, **1** du quaternaire] de 4 *Va.* **3** est *om.* B. **4** qu'un multiple du quaternaire] etc. *Va.* **5** ou 1024] *om. Va.* **8**, **2** aucun] un B **4** *Va donne les nombres* 100000 *et* 99998 **5** dit *om.* B

6 *Va et* B *donnent le nombre* 167, B *en marge* 171. 9 seulement *om.* B 9, 1/2 laquelle... heureux *om.* B. 4 divisé]mesuré B (divisé *en marge*) 5 seconde]2^me^ B 7 mesuré]divisé B 10 le]ce B 11 reste 66 qui]le reste 66 *Va.* P. **212**, 5 et *om.* B 6 diviseurs]divisions *Va* 10 B *omet le dernier alinéa.*

XLV (AB). **1**, 3 voici A, voyons B 4 que j'y ai faites A, que j'en ai fait B P. **213**, 1 tel nombre A 7 AB *intercalent* 7 *entre* 5 *et* 17. **2**, 3 : B *omet* 1°. P. **214**, 3 des quaternaires A 16/17 *Rédaction de* B : Soit par exemple un nombre donné $\overset{10}{23}\,\overset{125}{016}\,\overset{056}{32}\,\overset{7665}{125}$. Les nombres premiers plus grands de l'unité qu'un multiple du quaternaire qui le mesurent sont 5, 13, 17, 29, en premier par 5, par le quarré de 13, par le cube de 17 et par le cube de 29. (*En note.* Nota que, de ces deux nombres, le premier, savoir 10 125 056 7665 sert pour l'exemple où il dit qu'il faut diviser par 5, par le quarré de 13, par le cube de 17 et par le cube de 29; et l'autre, savoir 23 016 32 125 est le plus petit nombre servant au même effet, mais il le faut diviser par 29, le quarré de 17, le cube de 13 et de 5). **24** qui est *om.* A **28** par exemple *om.* B 30 j'ajoute]adjouxtant B **32** et par soi *om.* B P. **215**, 7 en *om.* B. *avant* **3**, B *intercale ce qui suit :*

3	3	2	1
5	13	17	29
125	2197	289	29

23 016 32 125 est le nombre produit de la multiplication de ces 4 puissances l'une par l'autre, qui est le moindre de tous ceux qui peuvent servir d'hypothenuse à 367 triangles rectangles. **3**, 2 qu'en ce cas B. **5**, 13 B *a en marge :* Le plus petit est 45. **14** en]de A P. **217**. 5 de *om.* A, *qui avant le dernier alinéa a la souscription sous cette forme :* à Tolose, ce 25 dc. 1640 Mon Reverend Pere, Votre etc. Fermat

XLVI (AB). **1**, 1 tête A, fête B **2** à A, avec B **2**, 2 ma B, une A P. **219**, 1 son A, mon B **3**, 16 facilement A, aisement B **20** humble etc. A. **22** mars A, may B

XLVII (AB). **1**, 9 pourrez lui A 19 les B, des A **21** toutes sortes A. **2**, 4/5 Votre etc. Fermat A.

XLVIII (B). P. **222**, 11 sera]seront P. **223**, 20 *et* **22** B *donne le nombre* 10 000 000. P. **225**, 8 par la précédente *est placé après* requises (7) **8**, 4 Formes de l'un 5 du 1 et 2 quarré P. **226**, 4 *a* et *b*] A_5 B_3 *a* et *b* (*sic*).

XLIX (*Va*, 166). P. **227**, 20 *Le signe* $\sqrt{\ }$ *est omis.* P. **228** (*Va*, 167) 5 les quarrés] le quarré **4**, 8 EDA *omis.* **12** ID]IO P. **230**, 14 d'autres|aussi (*Va*, 168).

L (*Va*, 169). P. **233**, 8 des quarrés]du quarré 10 des *omis.* **3**, 3/4 le quarré P. **235**. 4 (*Va*, 170) **4**, 7 Car]que 16 racine moindre du quarré de 3 **5**, 2 l'un à|l'autre (*Va*, 171) P. **239**, 4 *en rem.* le|double (*Va*, 172) **8**, 16 des triangles]du triangle 2 *en rem.* pas|si (*Va*, 173)

LI (AB). **1**, 2 chercher]saisir A **2**, 7 parce que A 8 en écrivant A 9 ai *om.* A **3**, 2 de ne pas vous rebuter A **4**, 1 eu de réponse A **6**, 4, Votre etc. Fermat A *qui omet la dernière ligne.*

LIV (AB). **2**, 1 vous avez maintenant reçu A 5 serez]soient A P. **250**, 6 la dite B, la A **4**, 9 ait A, aye B **5**, 1 prie de m'envoyer A 4/5 par la première commodité *rejeté après* Saint-Martin A 7 prie de me croire A 8/9 Votre etc. Fermat A.

LV (AB). **2**, 6 par autres voies A **3**, 9 et plus petit B **4**, 2 des B, les A 3 qu'il a *om.* A. **5**, 1 de *om.* A P. **253**, 6 M. Carcavi A 8/9 Votre etc. Fermat A.

LVI (AB). **1**, 4 jointe à celle-ci B, comte de Cellery A P. **254**, 6 le]les A 7 aucun autre AB 8 en *om.* A 10 Il pourrait encore y avoir A 15 pourtant]toutefois A **2**, 1 quelqu'unes A

LVII (AA'). P. **257**, 15 quasi tout A', presque utile A P. **258**, 5 premièrement]précédemment

LIX (AB). **1**, 1 B *commence comme suit :* Je vous dis que toutes les questions que j'ay proposees a Mess[rs] de St-Martin et Frenicle sont possibles (9) 2 et de Frenicle A 11 du] de B 14 livres]lieux *corrigé de* livres B. P. **261**, 6 Trouver *om.* B, *entre crochets* A ★ duquel A, auquel B 9 B *a en marge :* $\sqrt{216\,5017}$ || 5 627 138 321 281 || $\sqrt{2372159}$ **3**, 10 je *om.* B 13/14 *Alinéa omis* B.

LX (AB). **1**, 1 B *commence comme suit :* Non seulement les questions que j'ai proposees a M[rs] de St-Martin et Frenicle sont toutes faisables (4) 5 à *om.* B P. **263**, 1/4 de cette seconde question a celle que je vous envoyai dernierement qu'ils ont B **3**, 6 invite A, irrite B 10 B *omet cet alinéa et le suivant et rejette la date :* De Tholose, 1.S.1643, après le paragraphe 4 **4**, 1 en A, sur B P. **264**, 1 plus *om.* A ★ bien B, tirer A.

LXI (*Va*, 178). **1**, 2 le|sujet (*Va*, 179) 11 *Va donne le nombre* 1617. **2**, 4 Bulliaud.

LXII (*Va*, 201). P. **268**, 15 hic]heic (G) P. **270**, 5 ad|tempus (*Va*, 202) 6 AF]NF (*Va*) 7 NF *après* ut]AF (*Va*). P. **271**, 10 *et* 15 tempus per]motus per (G), ad tempus]ad motum (G) 17 NF]MF (*Va*) 20 XC]XE (*Va*) 21 AF]AR (*Va*) P. **272**, 9 *et* 17 respondentes]respondentis (G) 29 ut tempus|motus (*Va*, 203) P. **273**, 15 velocitates uniformes]velocitatis uniformis (G) **5**, 2 verita|tem (*Va*, 204) **6**, 1 breviter]succincte (G) 2 facessat]facescat (G).

LXIII (B). P. **277**, 14 R + 4S]R + S.

LXVII (D). P. **282**, 3 *en rem.* deprehendet]depræhendet.

LXX (*Va*, 179). P. **291**, 4 perte|même (*Va*, 180) **3**, 18 de]des 22 le]les **4**, 7 avec|(*Va*, 181) **5**, 15 le *omis* ★ et la]et de la P. **296**, 13 (*Va*, 182). **8**, 4 continue]continuée P. **297**, 2 æquari]æq. **9**, 13 les lignes]la ligne ★ Les deux tables insérées à la fin du n° 6 sont composées page 183 des *Va* sous le titre suivant : *Table dont il est fait mention dans la Lettre précédente.*

LXXI (P). **1**, 4 ne devoir point]ne point devoir

LXXII (*Va*, 184). **2**, à la fin de la page. Le tableau est placé en manchette et disposé verticalement; la 1[ere] et la 16[e] des combinaisons sont reportées au milieu de la ligne ainsi : *aaaa* *bbbb* P. **302**, 6 quand|il (*Va*, 185) P. **304**, 4 avons|fait (*Va*, 186) P. **304**, le tableau est composé verticalement dans le texte. P. **305**, 22 de même : |(*Va*, 187) **5**, 2 que]qui **6**, 8 trois|joueurs (*Va*, 188).

LXXIV (P). P. **312**, 15 des]de.

LXXVI (Q). **3**, 6 avec]dans **11** *et* **14** foyers]feux P. **317**, 8 qu'après par]après dans 15 *et* 16 s'il est]étant 16 le lieu]il 19 les lieux]le lieu P. **318**, 1 au plus

facile les donnés]le plus facile donné **P. 319, 5** terminée a]terminée dans **7, 1** J'ai cherché pour le lieu **9** si elle est plus petite]s'il est plus petit **10** si elle est plus grande]s'il est plus grand **P. 320, 1** les lieux solides]le lieu solide.

LXXVII (H). **4, 1** Les]le.

LXXVIII (H). **2, 5** un]on **3, 9** au]du **28** 121]122 *erreur typographique, corrigée dans les* ADDITIONS.

LXXIX. **2, 3** cubus]cubus numerus (*Va*).

LXXX (H, E). **P. 334, 9** nombres *omis* (H); **15** des plus petits (E), du plus petit (H).

LXXXII (E, *Va*, 189). **2, 1** où]que (E, *Va*) **3, 1** quoiqu'énoncé]quoique non si (E) **P. 340, 5** | égale au (*Va*, 190) **5, 1** parle ni]parle pas ni (E) **3** voyage vous] voyage de vous (*Va*) **P. 341, 1-2** Borel] Bourel (E).

LXXXIII (E, *Va*, 191). *Va* donne la date du 20 juin 1657. — Le post-scriptum de cette lettre est la seule différence qu'il y ait entre l'édition originale et la réimpression du *Commercium* dans le tome II des Œuvres complètes de Wallis.

LXXXIV (E, *Va*, 191). **2, 8** mais | (*Va*, 192) **3, 4** point (E) *omis Va* **6, 1** (*Va*, 193) **3** qui]qu'il (*Va*) **P. 346**, *La dernière ligne omise dans Va.*

LXXXV (E, *Va*, 193). **P 348, 6** compo | sent (*Va*, 194) **P. 349, 6** entre] en (E, *Va*) **9** il *omis* (E, *Va*) **21** de]à (E, *Va*). **P. 351, 1** sont | compris (*Va*, 195) **1** *en rem.* pourroit] pouvoit (E, *Va*) **P. 352, 20-22**: Dans le tableau de E et des *Va*, les lettres algébriques suivent les numéros d'ordre et précèdent le texte qui explique leur signification. **P. 353, 10** (*Va*, 196).

LXXXVII (*Va*, p. 196). **P. 360, 30** si vite | qu'il (*Va*, p. 197).

LXXXIX (*Va*, p. 197). **P. 363, 13-14** homme | et (*Va*, p. 198).

XC (C, D). **P. 366, 8** depuis « Monsieur de Carcavi » jusqu'à **15** « géométrie » inclusivement omis dans D. C ponctue ainsi **15-16** : « ... de ma géométrie pour la question de dioptrique. Je... » **20** je *omis* dans C. **P. 367, 3-7** alinéas omis dans D.

XC *bis* (C, D). **3, 3** en]dans (D) **7** A]AF.

XCI (E). **P. 375, 3** premiers]premières **P. 378, 14** formel]formé.

XCII (*Va*, 198). **P. 379, 22** mai ha | vuto (*Va*, 199). **P. 380, 24** traduttore]tradottore **26** teologi i]theologii **P. 381, 1** attribuissi]attribuissè **12** di modo che posso]demodo che posto **17** spada, hora]spada horo **P. 382, 3** nel che | (*Va*, 200).

XCIII (Texte de C, variantes de D). **1, 3** pource que]parce que **P. 383, 1** occuper mon esprit à des considérations] attacher mon esprit à des spéculations **7** meilleure]recevable **11** je]il (C) **12** mépris] luy-mesme *aj.* **3, 13** dans le milieu qu'elle parcourt *omis.* **15** main *omis* **P. 385, 4** dites, la puissance]dites, entre la détermination et la puissance **4, 3** raillerie]de raillerie **11/12** de donner les mains à cela] d'y consentir et d'y donner les mains (D) **12** ses mains (C). **14** la division ou la perte]la perte **17** changer ou diminuer] rien diminuer (C) **20/23** *Les mots entre crochets sont des additions de* D. ★ pour accorder... détermination *omis.* ★ *Après* BI (ligne 23) D *continue :* pour faire que la détermination qu'elle doit prendre se rapporte à la vitesse ou à la force qui luy reste et qui la com-

mence en B. 24/25 elle fasse autant de chemin ou qu' *omis* 26 elle conserve toujours *et* même *omis* 27 là] ne soit point changée *aj.* 5, 1 ce qui le plus a]ce qui a le plus P. 387, 4 dit]a-t-il dit 11 à laquelle détermination 12/13 à laquelle se doit... la vitesse]laquelle se doit... à la vitesse 13/14 (car autrement... toile) *omis* 14 pour faire *manque dans* C. 23/24 s'avancer vers le côté... détermination]s'avancer vers G et que cette détermination se doit et se peut accommoder avec la vitesse qui lui reste 6, 2 il n'a]il semble n'avoir ★ la même]cette 3/4 aussi en même temps] toujours 4 qu'elle] que la chute P. 388, 1 non]qu'elle ne le soit pas 4 mais elle est]ayant été 6 la même quantité de]une pareille 11 de]qui arrive en 12 de]en ★ la pousse ou qui l'arrête]l'avance ou qui la retarde 21 de deux autres 28 c'est à dire selon *ajouté* 29/30 sa vitesse a reçue en B et selon le rapport que cette vitesse a eu avec]cette vitesse a eue avec (C) 30 a eu]s'est trouvée avoir P. 389, 4 suive bien]soit une suite 5 d'un bon]de faire un bon 7, 12 mieux]plus P. 390, 2 à tous ceux de votre dite lettre]à votre dite lettre (D), à tous ceux de votre dernière lettre (C) 4/5 qu'il a faite à votre lettre]qu'il y a faite 12 qu'un autre m'en eût déchargé]de m'en décharger sur un autre 15 si mon discours se fut adressé à vous]si j'eusse eu affaire à vous. 18 dans]en 19 vous vous mettez de mon]vous prenez mon 20 toute autre occasion. 21 prêt]tout prêt.

XCIV (Texte de C, variantes de D). Réflexions... Rohault]Réponse de M. Rohault a la lettre de M. de Fermat page 178 qui contient ses anciennes objections sur la Dioptrique de Monsieur Descartes. P. 391, 9 ou... reçue]et... vue 10 Toutefois]Mais 13 de cette ville *omis* 14/17 vais essayer... séparément]vas donc essayer d'y répondre, puisque vous le désirez. Et pour le faire plus commodément, je suivrai de point en point tous les articles de sa lettre que j'examinerai les uns après les autres. 18 Art. 1^er^]Art. 1^er^. *J'ai vu*, etc. 19 l'humeur civile de *omis* ★ honoroit]a voulu honorer 20 est encore]sera toujours 21 Quoique]Quand ★ accommode]auroit accommodé 22 divise]auroit divisé ★ son mouvement en certaines déterminations plutôt qu'en d'autres]la détermination du mouvement d'une certaine manière plutôt que d'une autre 23 doit]devroit 24 se sert]s'étoit servi 26 choisit]a choisie ★ vienne]soit venu 27 entreprend]avoit entrepris. P. 392, 1 son mouvement]la détermination de la balle qui se meut dans la ligne AB 1/2 détermination]qui fût 2/3 surface... surface]superficie CBE et en une autre qui lui fût parallèle 3/4 cette dernière]celle-ci 5 ce que lui... une]et cela lui a été un moyen de trouver la 6 plus aisément]qu'il cherchoit, ce ★ n'eût]auroit ★ en suivant]s'il eut suivi 11 pource]parce ★ désavoueroit]n'a pas 12 comme on pourrait croire]ce semble ★ s'en servir]contre lui *ajouté* 15 pas]rien du tout ★ sa détermination]la détermination qu'elle avoit à avancer vers BG 16 à]de 21 [plus ou] *addition de* D *comme les autres mots entre crochets dans la suite du texte* 24 aussi... conséquence (ligne 31) *omis* 33 quelques paroles]le texte. P. 393, 2/3 que... a]qu'a Monsieur de Fermat 5 désavouée dans la remarque]remarquée 14 accorde]semble avoir accordé 15 qui est de devoir]qu'il auroit eu tort de contester 17 aussi changée]aussi bien changée que celle de haut en bas 18 infirmeroit]rendroit nulle ★ raison]qu'il en apporte c'est parce *ajouté* ★ est *omis* 24 comme]feroit *ajouté* ★ porté]mis 28 après quoi il vient à croire]et qui après cela 29 que cette dernière]de sa perte, viendroit à croire que la somme qu'il avoit de l'autre côté 30/31 celle d'où... redire]de l'autre 32 sans pourtant... d'Euclide (P. 394, 1)]et à peu près comme pourroit faire un jeune homme qui sans avoir jamais appris ce que c'est que proportion, sauroit simplement compter. P. 394, 2 quelques uns des]une partie de ses 3/4 et ne se soucieroit pas]sans se soucier 10 en]dans la ligne. 11/12 outre que... ici]M. de Fermat semble encore accorder ici 12 auroit tort]auroit

aussi tort 13 dans]par ★ Cet article... paroles]ce qu'il y a de plus dans cet article n'est que le propre texte 16/17 manque de se ressouvenir qu'il y a]pour ne s'être pas souvenu de la 19 prend]ici *ajouté* 20 dit ces mots : elle]dit que la balle 21 se meuve]doive se mouvoir 22 plus]aussi ★ soit cette ligne]soit la longueur de cette ligne 23 elle doit tellement être inclinée vers la droite]la détermination vers la droite doit tellement s'accommoder avec la vitesse qui lui reste 24 plus qu'elle n'avoit]autant qu'elle avoit ★ C'est le sens]C'est là le sens 25 au lieu de l'autre]et non pas celui 26/28 et son intention... temps]cela étoit assez évident puisque là même 29 n'est que simple]total de la balle est diminué de moitié. *Le reste de l'alinéa manque.* 32 n'est pas au désavantage de]ne fait rien contre ★ nieroit]tout franc *ajouté* 33 a été dit dans la remarque]a été remarqué P. 395, 1 le 3ᵉ article]l'article troisième 3 que contiennent]qui est contenu dans 4 je crains qu'ils ne... sujet]cela ne fait rien du tout au sujet et n'a servi qu'à tromper M. de Fermat qui y parle du mouvement composé en un autre sens que n'a fait M. Descartes 8 le]à le 12 il *omis* 12/13 la détermination... être]que la... est 13 rien supposé]pas parlé 14 mouvement]total *ajouté* ★ à son sens]au sens de M. Descartes 16 autre]nouveau 16/17 dont on veuille... du]qui augmente d'un 17 plus de ce qui étoit en AB]la force qu'elle avoit déjà en ce sens là 18 soit]est 24/25 desquelles... l'une]l'une desquelles par conséquent 30 puisque la]puisque l'augmentation de vitesse ou la ★ de]à ★ mouvoir]que le mobile acquiert au point de rencontre qui sépare les deux milieux *ajouté* ★ nature du... ajoute (P. 396, 3)] nature du second milieu laquelle ne change point mais est toujours la même dans toutes les inclinaisons. Et la principale faute que commet ici Monsieur de Fermat est fondée sur ce qu'il croit que le mouvement composé en BI n'est pas toujours également viste, comme s'il dépendoit de la direction ou détermination des deux forces mouvantes, au lieu que c'est à elle à s'accommoder à la force du mouvement, lequel est composé, et non pas la détermination, et c'est ce qui a trompé M. de Fermat et qui lui a fait faire tous ses faux raisonnements : et c'est peut être encore ce qui l'empêche à présent de recevoir la démonstration de M. Descartes. Aussi ce qu'il ajoute... P. 396, 7 certain s'il faut]assuré qu'il faille 10 de la seule surface... retenir (13)] ici de l'angle compris sous les lignes de direction des deux forces mouvantes : mais parce qu'il dépend de la nature du second milieu que le corps a à parcourir, de faciliter ou de retarder son mouvement, il est évident, ce me semble, que l'on doit retenir 16 vous m'en... d'ébauché]j'en ai vu 21 honore]estime 22 me daigne]daigne me

XCV (Texte de C, variantes de D). 2, 10 moins]plus ou moins P. 399, 11 peine]de la peine 13 balle]AB *ajouté* (C) P. 400, 5 transporter]transférer 21/22 ce point... O] c'est-à-dire au point O 31 même côté]même côté là P. 401, 4 transportant]transférant ★ seulement]au-dessus du plan *ajouté* 5 démonstration]une démonstration 6 paralogisme]un paralogisme 4, 10 CB]CF (C); *les mots* en ligne droite *omis* 14 arrivât] aussi *ajouté*. P. 402, 7 à l'avance]par avance

XCVI (E). P. 404, 1 Sainte-Croix]Sainte-Croise

XCVII (Texte de C, variantes de D). 1, 1 belle]grande 8 par]de P. 409, 7 interposition]interprétation 2, 6 reste]laisse 4, 6, 8 par]de 9 vers]dans P. 412, 13, 14 du]de

XCIX (Texte de C, variantes de D). 1, 21 de la réflexion]touchant la reflexion ★ et des réfractions]et la réfraction P. 415, 4 fournir]obtenir 2, 3 veulent plus que lui]veulent trop subtiliser D, voient plus que lui C ★ trouvent]puissent trouver 5 de] du C P. 416, 2 un certain côté]le côté 14/15 selon quelqu'une de ses directions] auparavant 15 celle]cette détermination 3, 12 une fois]pour toutes *ajouté* 4, 10 vers

ce côté là] dans la même ligne **12** veut conduire la balle vers D] tend de B vers D ★ vers D] vers BD (C) **22** à remonter] de remonter **28** preuve] une preuve **5, 2** en *omis* **8** par] de **20** perpendiculaire] de sa chute **P. 419,** 3 d'entre] qui sont entre **6,** 3 d'apercevoir] à apercevoir **P. 420, 4** déterminations] autres **7, 2** par exemple *omis* **10/11** puisse faire] fasse **8,** 9 une démonstration **10** un paralogisme **P. 421, 7/8** et... perpendiculairement *omis* **14** voici] voyez (C) **17** à ce point B] là **P. 422, 1/2** impénétrable et inébranlable *omis* **P. 424,** 9 [de réflexion] *addition de* D; *de même pour les mots mis par la suite entre crochets* **16** toujours être] être toujours **P. 425, 11** par exemple *omis* **15** égard] égal (C) **23** puisse faire] fasse **27/28** transporte] transfère (*deux fois*) 30 transporter] transférer. **P. 426,** 1 transporté] transféré **P. 428,** 4 ou plus ou moins] par exemple 6 sa] la **16,** 13 visibles] légères (C) **P. 429,** 2 aussi *omis*.

CI (H). **P. 432,** 5 comme] car **2,** 10 est] étoit **4,** 8 je *omis* **P. 434,** 4 un *omis* **6,** 6 2Q] 2 quarrez 8 ou découvrir] ou de découvrir **P. 435, 8,** 6 elle *omis*.

CII (I, fol 34). **P. 437,** 8 Père | que (f° 34 verso). 30 vous | donneront (f° 35)

CIII (H). **P. 439,** 5 que] qui est, 8 l'a] a 9 de la] de sa **P. 440,** 10 et *omis* **21** de la dernière] des dernières.

CIV (H). **1,** 3 soit] ayt *corrigé en note*. **2, 11** 6Q] 5Q **15** le *omis* **P. 443,** 1 parabole] parabolique 9/10 du rayon] de la droite 15 quarrécubique] cubique.

CVI (H). **1,** 3 parabole] parabola.

CX (H). **P. 455,** 1 PQ] PO *corrigé en note*.

CXII (Texte de C, variantes de D). **1,** 7 car] qu' 10 durs] denses (*peut-être mieux*) **2,** 3 non plus] que la sienne *ajouté* 9 des principes] du principe **10** trouver] découvrir **P. 459,** 2 *et* 4 de O] d'O **18** du temps *omis* C. **4,** 5 [qu'] *mq.* C. 8 cette sorte] ces sortes **12** qui est] et **17** précédent] présent **18** paroît] par là *ajouté* **P. 461, 16** [de] *mq.* C **5,** 6 tant *omis* **P. 462,** 1 des] aux 9 suffiroit] suffira **6,** 6 rendre] à lui *ajouté* 9 géomètres] hommes (C) ★ les] ces

CXIII (D). **3,** 5 point *omis* **P. 468,** 5 celle de l'autre] *au lieu de ces mots l'annotateur anonyme de l'exemplaire de l'Institut a écrit ceux-ci :* « le plus ou moins de facilité à recevoir son action qui est entre les deux milieux ».

CXIV (D). **P. 480,** 32 a] ont.

CXV (D). **P. 484,** 6 sarà] il sarà

CXVI (*Va*, 156). **P. 486, 26** des] de **P. 487,** 3 aller | chercher (*Va*, 157)

CXVII (*Va*, 158). **P. 491,** 25 et | aux (*Va*, 159) **P. 494,** 9 égal | au (*Va*, 160) **11** BNF] BNX **18** FV] FN (*la première fois*) **19** FN] FV **P. 495,** 30 comme B] C.O.B.

ERRATA.

Tome I.

D'après les lectures définitives des éditeurs de la *Correspondance de Huygens*, n° **947**. il faut :

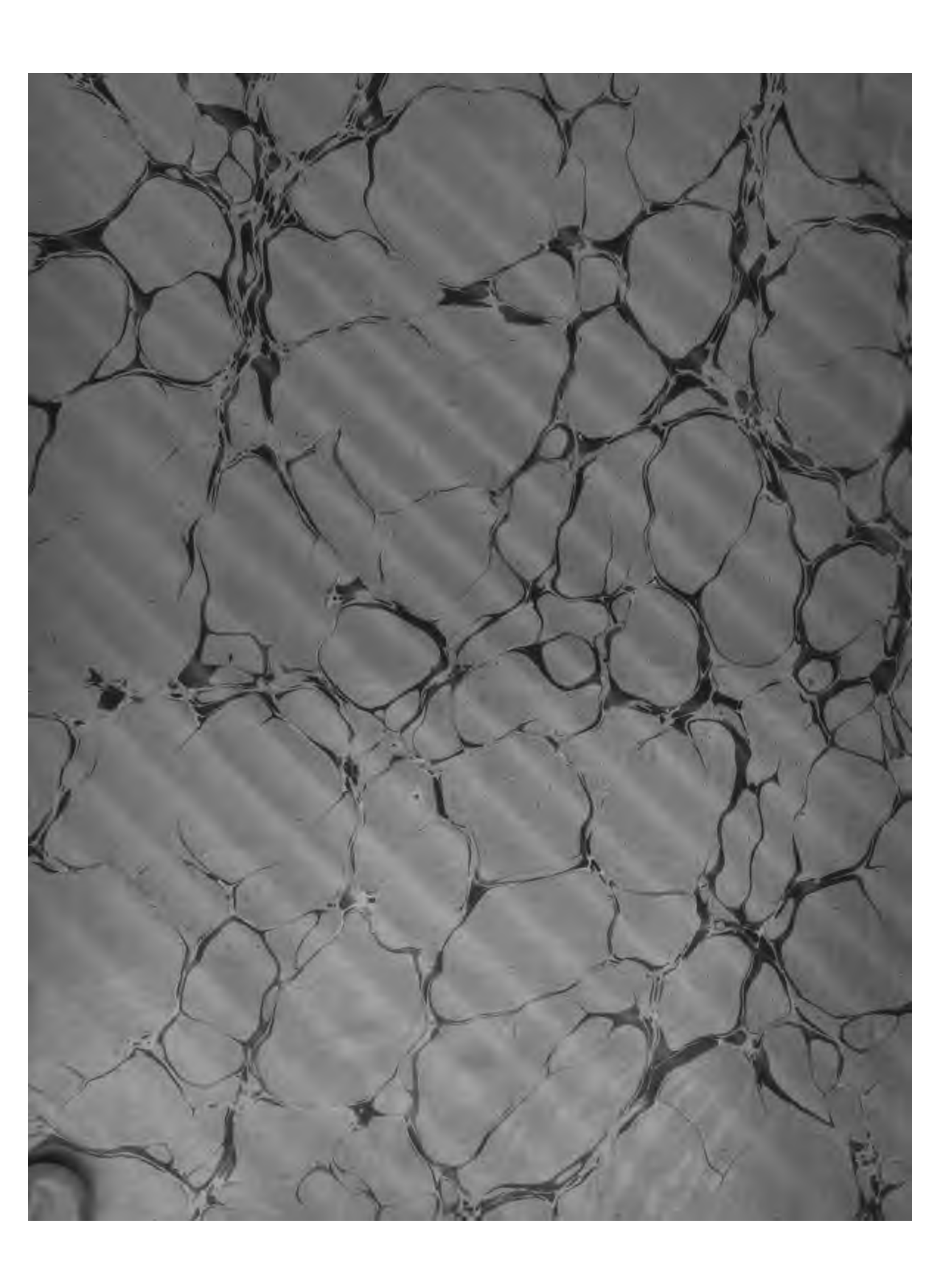
Page 189, ligne 7 : Au lieu de *subvenire cepit*, lire *subvereri cepi*.
» 191, ligne 15 : Au lieu de *hoc*, lire *nos*.
» 193, ligne 3 : Au lieu de *analyticæ*, lire *analytico*.
» 194, ligne 2 : Au lieu de *primogenitam*, lire *primigeniam*.
» 325, ligne 3 : Au lieu de — 1, lire + 1.

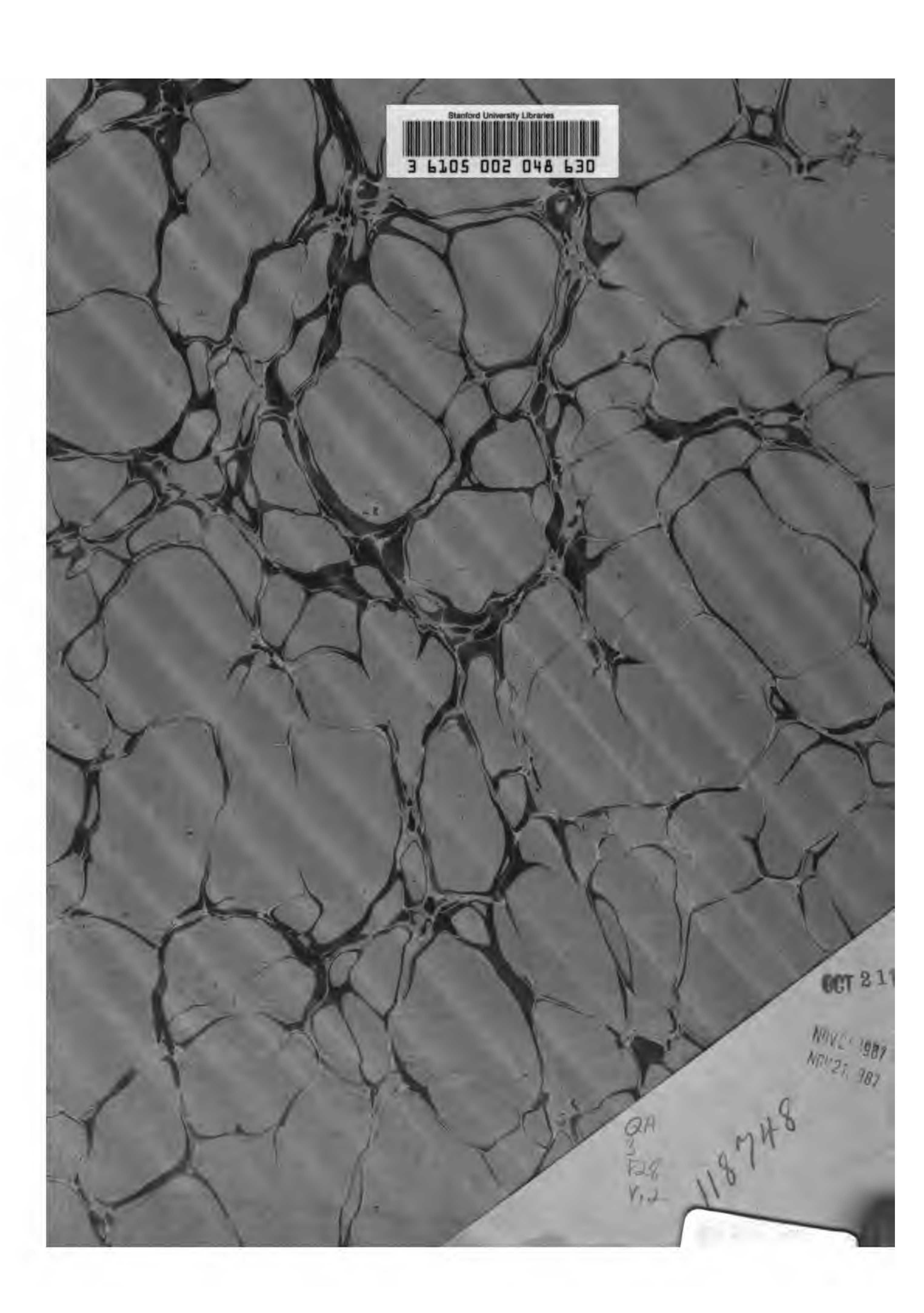
Tome II.

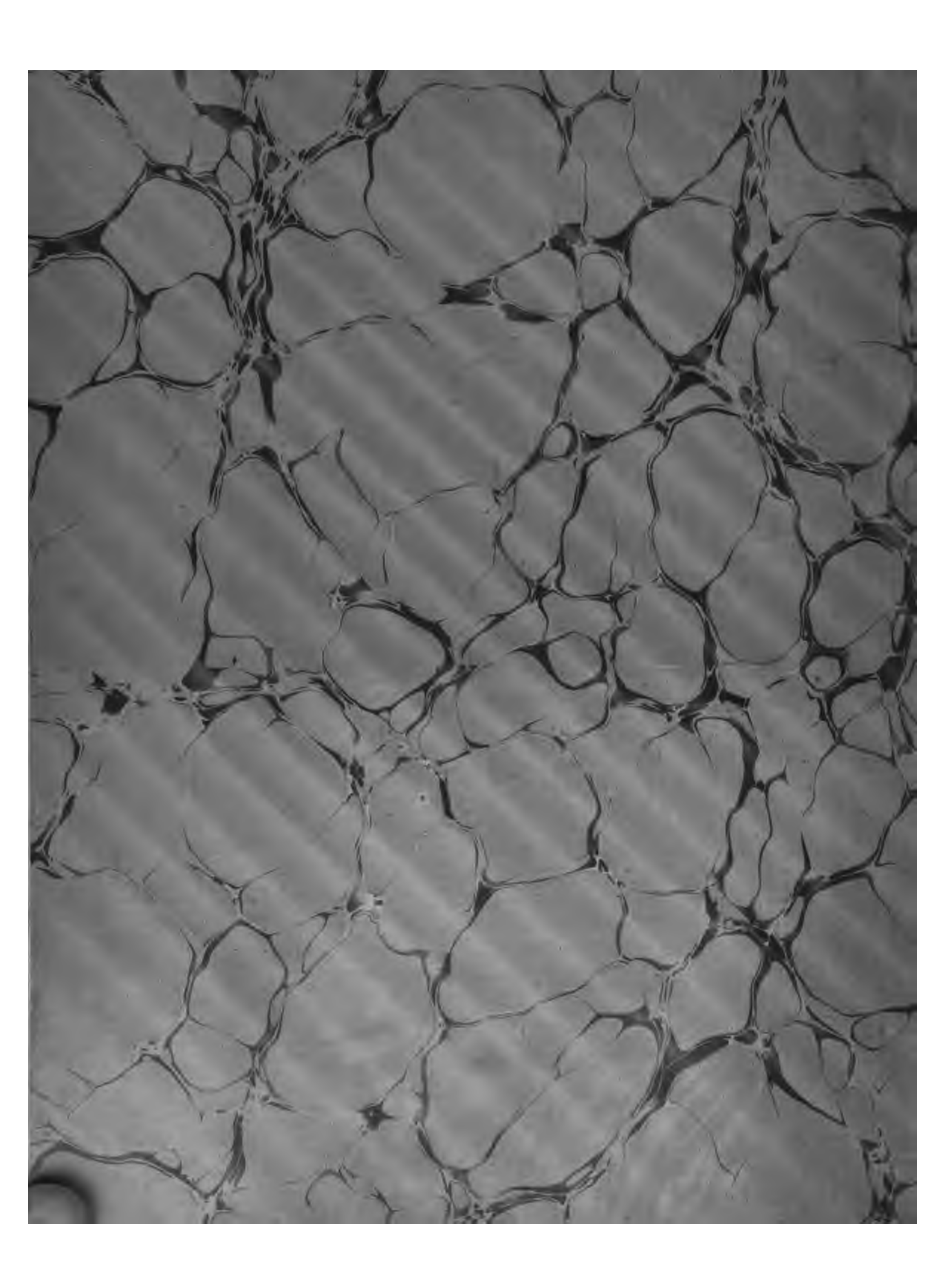
Page 8, ligne dernière de la note : Au lieu de *note* 6, lire **6**, *note*; c'est-à-dire page 26, note 1.
» 59, titre courant : Lire 16 *septembre* 1636.
» 83, ligne 5 : Au lieu de *avoir*, lire *d'avoir*.
» 99, titre courant : Au lieu de *février*, lire 16 *décembre*.
» 115, ligne 1 : Lire DE, EF et FD.
» 161, titre courant : Au lieu de *De maximis et minimis*, lire *Juin* 1638.
» 282, note 1 : Après M***, ajouter : (*probablement Auzout*).
» 352, ligne 3 : Au lieu de *on doit y*, lire *on y doit*.
» 355, Corrigez le numéro de la page, marquée 555.
» 368, ligne 8 : Au lieu de *je devrois*, lire *je ne devrois*.
» 388, ligne 15 : Au lieu de *il dit*, lire *il a dit*.
» 435, ligne 2 : Au lieu de 2N + 5, lire 3N + 5 (*Remarquer qu'avec ces coefficients l'équation double est impossible*).
» 436, CII, ligne 3 : Au lieu de *fol.* 13, lire *lettre* 13.
» 438, note 2 : Au lieu de *fig.* 93, lire *fig.* 94.
» 452, ligne 8 *en rem.* : Au lieu de *non*, lisez *non pas*.
» 471, titre courant : Au lieu de 13 *mai* 1662, lire 6 *mai* 1662.
» 473, titre courant : Au lieu de CXIII, 6 *mai* 1662, lire CXIV, 13 *mai* 1662.

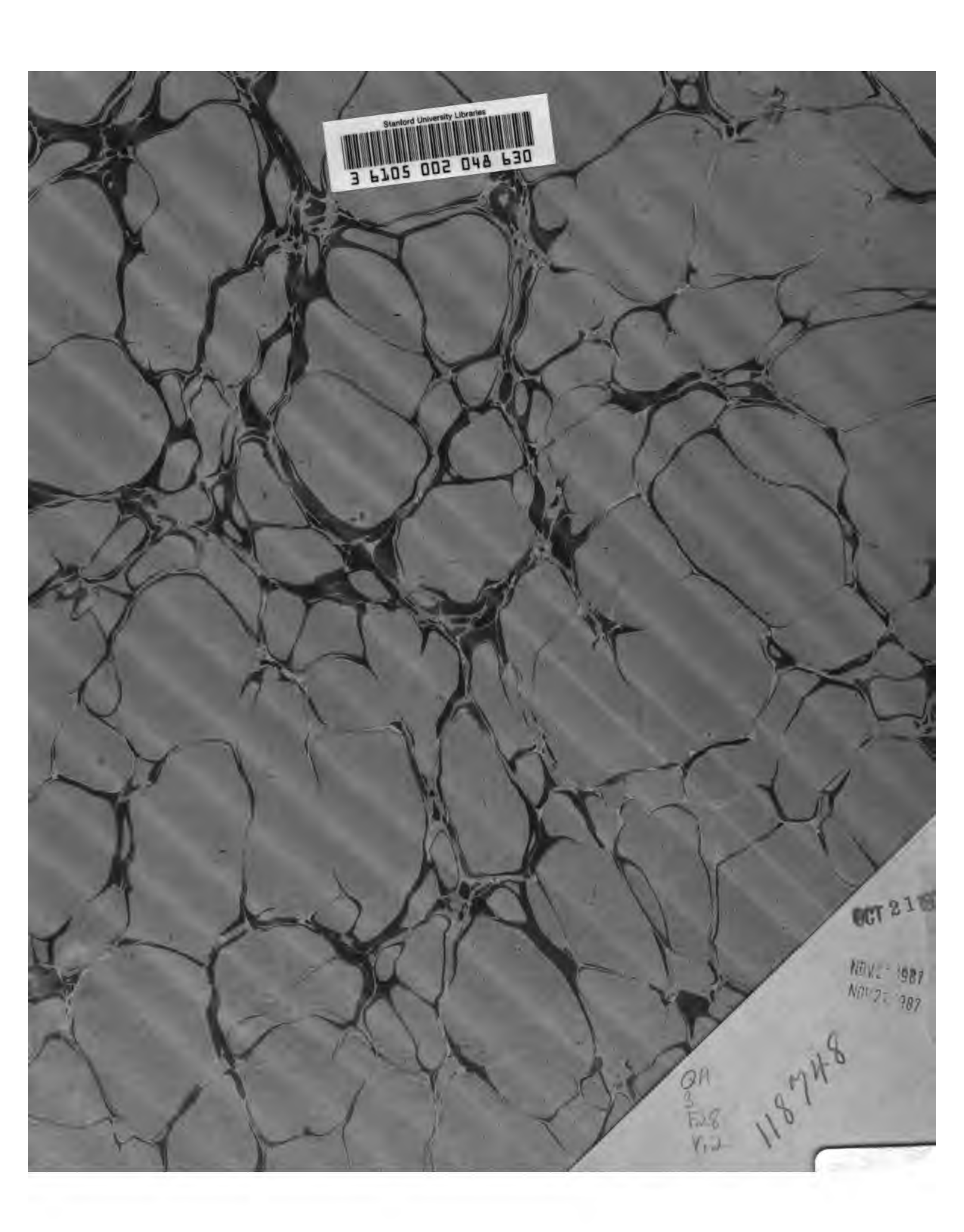
FIN DU TOME DEUXIÈME.

16642 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et fils, quai des Grands-Augustins, 55.




Stanford University Libraries
3 6105 002 048 630
OCT 2 1
NOV 2 1987
NOV 21 1987
QA
3
F28
V.2
118748




Stanford University Libraries
3 6105 002 048 630
QH
3
F28
V.2
118748